Évaluation des incertitudes

http://ligodin.free.fr

ligodin@free.fr

- DOCUMENT 6 : Combinaison et propagation des incertitudes
  - 1. Mesure directe : présence d'incertitudes de type A et B (incertitudes combinées) diapo 24
  - 2. Mesure indirecte : propagation des incertitudes (incertitudes composées) diapo 25
- DOCUMENT 7 : Incertitude élargie & intervalle de confiance diapo 26
  - 1/ Utilisation d'une loi de probabilité normale diapo 27
  - 2/ Utilisation de la table de Student diapo 29
  - 3/ Cas des faibles échantillons (Méthode de l'étendue) diapo 31

Document 1 : Analyse de situations

A. On réalise 5 mesures successives d'une masse (en g) sur une balance de précision :

1/ Quelle valeur va-t-on donner à la masse pesée ?

50,00001
50,00002
49,99999
50,00001
50,00002

2/ Est-ce la valeur vraie ? Pourquoi ?

3/ Comment peut-on présenter le résultat en toute honnêteté ?

B. Sur le corps d'une pipette jaugée, sont inscrites des informations :

4/ Cette pipette, même correctement utilisée, délivre-t-elle toujours 50 mL ?

C. Soit le pied à coulisse suivant :

PIED A COULISSE DIGITAL. Accuracy ±0.02 mm / 0.001 in. Capacity 0 to 150 mm / 0 to 6 in. Resolution 0.01 mm (0.0005 in.)

5/ Peut-on mesurer une longueur de 0,02 mm avec ce pied à coulisse ?

D. On désire vérifier la balance de précision. Pour cela, on utilise une masse étalon dont le certificat d'étalonnage est le suivant :

Certificat d'étalonnage N° 3/3

RESULTATS D'ETALONNAGE				
Masse nominale	Marquage	Masse conventionnelle	Incertitude en ±	Opérateur(s)
15 g	15	14,999 9 g	20 mg	

6/ Comment se fait-il qu'il y ait une case "incertitude" alors que la masse est censée être une masse étalon ?

7/ Si la balance testée affiche une moyenne de 15,0050 g. Est-elle en "bon état" de fonctionnement ? Peut-on en être réellement sûr ?

DOCUMENT 2 : NOTION D'INCERTITUDE

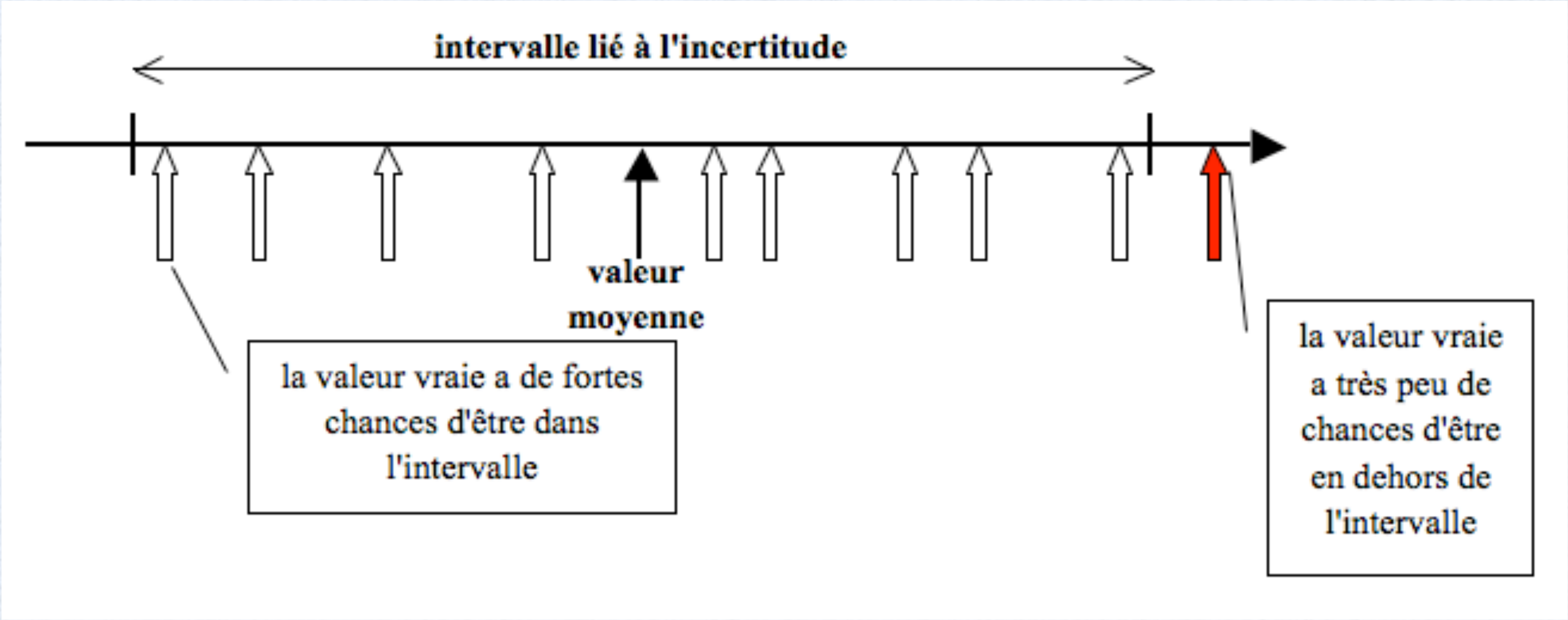
Tout mesurage s'accompagne d'un DOUTE sur le résultat trouvé : il est impossible de connaître la valeur vraie ! Il faut donc :

- ♣ évaluer l'incertitude sur le résultat.
- ♣ encadrer ce résultat dans un intervalle lié à l'incertitude, à l'intérieur duquel on est sûr, avec une probabilité importante donnée, de trouver la valeur vraie.

Exemple d'écriture probabiliste du résultat d'une pesée :

$$\boldsymbol{Prob_{95\%} = (10{,}05786 < m < 10{,}08987)\ g}$$

Cette écriture de "métrologue" signifie qu'il y a 95 % de chances pour que la valeur vraie de la masse soit comprise entre 10,05786 et 10,08987 g. Donc 5 % de risques pour qu'elle soit en dehors !



L'**INCERTITUDE** est un paramètre associé au résultat d'une mesure et qui caractérise la dispersion des valeurs attribuées au mesurande.

Tout " l'art " de la métrologie est d'être capable :

♣ d'évaluer l'incertitude sur une mesure quelle que soit la manière dont elle est obtenue : mesure directe (mesure d'une température par exemple), indirecte (détermination d'une concentration lors d'un dosage), etc.

♣ de présenter "correctement" le résultat en tenant compte de cette incertitude.

Document 3 : Les incertitudes normalisées

☛ La détermination de l'incertitude est **normalisée**. On parle alors d'**incertitude-type**. Elle est notée **u** pour *uncertainty*.

♣Incertitude de type A :

Elle est évaluée à partir de l'étude statistique d'une série de valeurs mesurées sous des conditions de répétabilité.

♣Incertitude de type B :

Elle est estimée par des moyens autres que statistique et est liée à l'utilisation des instruments de mesure.
On se base donc sur la documentation des fabricants, les certificats d'étalonnage, etc... , pour l'estimer.
Le GUide pour l'expression de l'incertitude de Mesure (GUM) constitue le document de référence fondamental.

Évaluation de l'incertitude-type de type A : $u_A(x)$

Ce type d'incertitude nécessite de faire plus d'une mesure !

☛ Soit une série de **n valeurs mesurées** sous des conditions de répétabilité : $x_1, x_2, ..., x_n$.

➢ La **meilleure estimation du résultat** de la mesure est :

La moyenne arithmétique : $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

➢ La **dispersion** des valeurs est estimée par :

L'écart-type expérimental ou écart-type estimé :

$$s_{exp} = s_n = \sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

L'écart-type estimé s'utilise pour une valeur de n fini, et possède la même unité que x_i.

➢ L'**incertitude-type de type A** est estimée par la relation :

L'écart-type sur la moyenne :

$$u_A(x) = s(\bar{x}) = \frac{s_n}{\sqrt{n}}$$

L'écart-type sur la moyenne s'utilise pour une $n \geq 10$, et possède la même unité que x_i.

Si l'opérateur ne peut pas faire plusieurs mesures, il doit considérer un écart-type de répétabilité, $s_{rép}$, fourni par le fabricant de l'appareil utilisé ou par d'autres séries de mesures et considérer que c'est son incertitude de type A.

Évaluation de l’incertitude-type de type B : $u_B(x)$

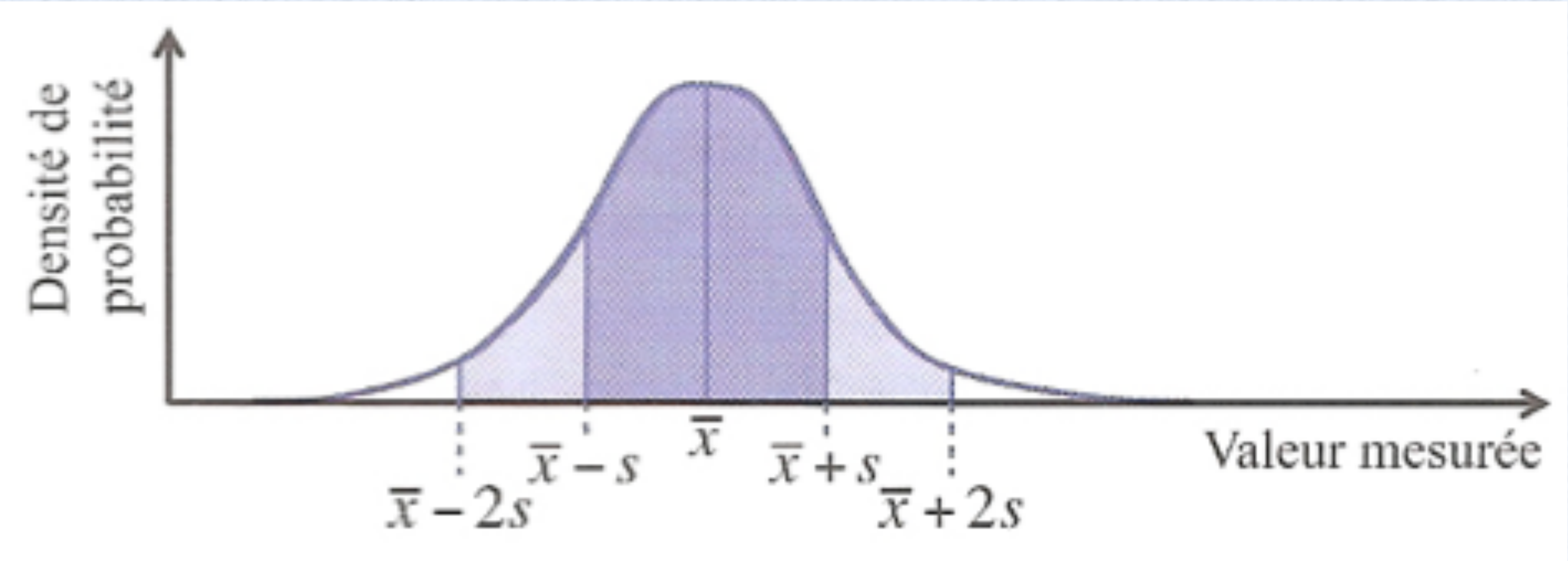
☛ Reprenons l’exemple de la pipette jaugée de 50 mL, sur laquelle il est écrit ± 0,050 mL. C’est la tolérance. Lorsqu’un manipulateur fait un prélèvement avec cette pipette, a-t-il plus de chance de prélever 50,000 mL que de prélever 50,020 mL ou encore 49,950 mL ?

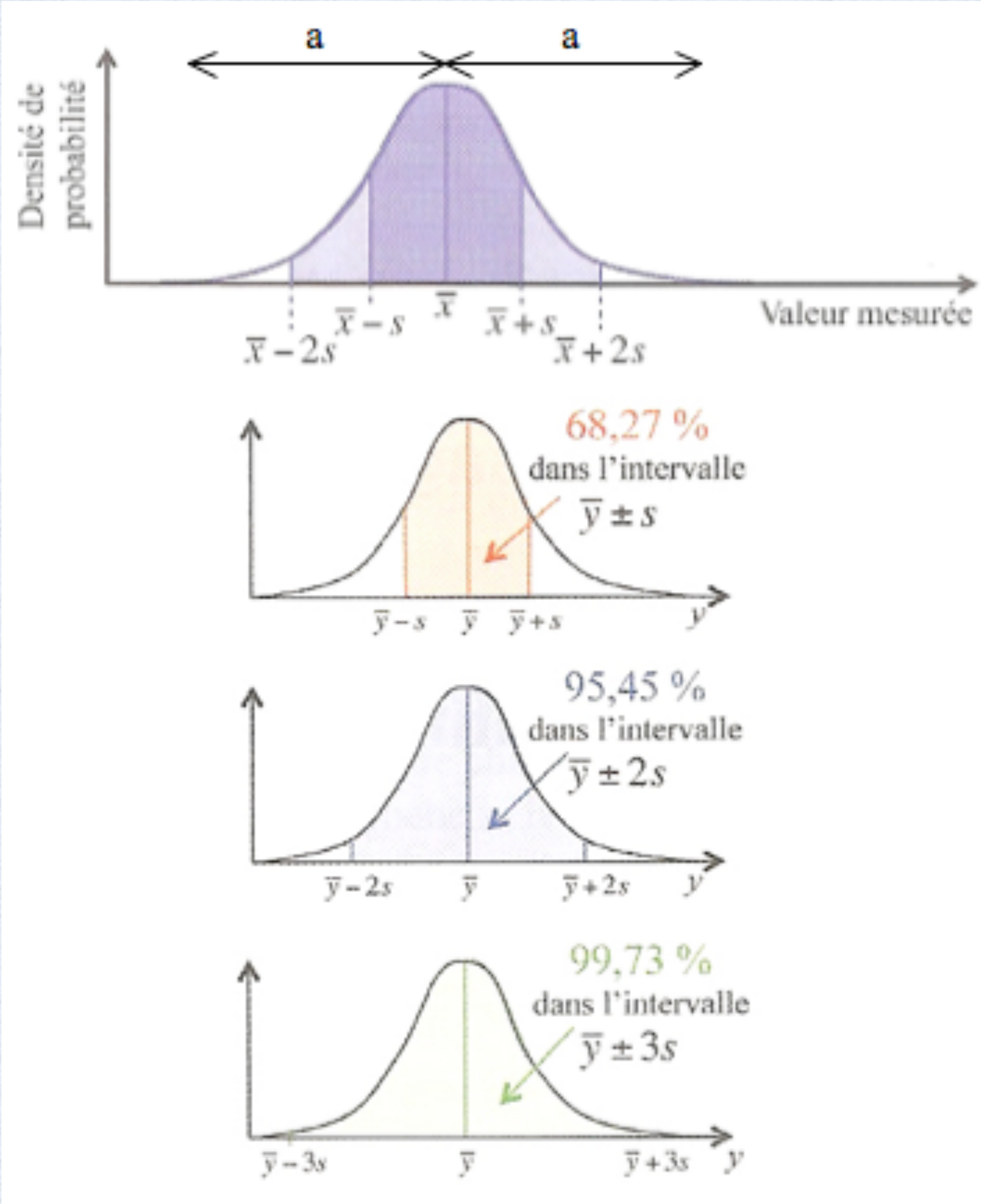
☛ De même, sur une balance de précision, de résolution d = 0,12 mg, un manipulateur obtient une masse de 15,0547 g.
Comment peut-il être sûr de ne pas avoir pesé 15,0548 g ou 15,0546 g ?

Document 4. Les lois de distribution & l'incertitude de type B associée

1/ La loi normale (Gauss)

☛ On considère que toutes les valeurs sont comprises dans un intervalle $\bar{x} \pm a$ centré sur la moyenne.





La moyenne possède la plus forte probabilité et plus les valeurs en sont proches, plus leur probabilité est élevée.

68,27 % des valeurs sont comprises dans l'intervalle moyenne ± 1 écart-type.

95,45 % des valeurs sont comprises dans l'intervalle moyenne ± 2 écarts-types.

99,73 % des valeurs sont comprises dans l'intervalle moyenne ± 3 écarts-types.

Détermination de l'incertitude-type de type B : $u_B(x)$

☛ Approximation :

- La quasi-totalité des valeurs (99,73 %) se trouve dans l'intervalle :

$$\bar{x} \pm 3s$$

- L'**étendue** des valeurs ω = valeur max - valeur min vaut :

$$\omega = 2 \times 3s = 6s = 2a$$

- On peut alors considérer que :

$$s = \omega/6 = a/3 \quad \text{d'où} \quad \mathbf{u_B(x) = s = a/3}$$

☛ Utilisation : loi peu utilisée en pratique sauf si précisée par le fabricant.

Exemple 1 :

- balance indiquant : répétabilité (1 écart-type) = ± 0,015 mg

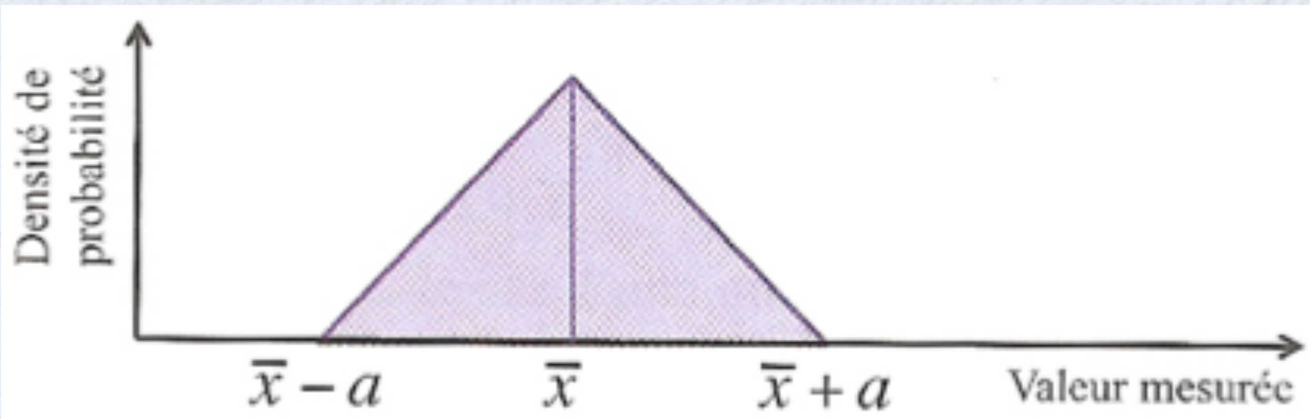
Indiquer l'incertitude de type B associée :

Exemple 2 :

- Un certificat d'étalonnage indique que la valeur R d'une résistance étalon de valeur nominale égale à dix ohms est 10,000 742 Ω ± 129 μΩ à 23°C et que l'incertitude indiquée de 129 μΩ définit un intervalle au niveau de confiance de 99,73 %.

Indiquer l'incertitude de type B associée :

2/ La loi triangulaire isocèle



La moyenne est très probable. La probabilité décroît ensuite linéairement au fur et à mesure que les valeurs s'éloignent de la moyenne.

Détermination de l'incertitude-type de type B : $u_B(x)$

$$u_B(x) = s = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

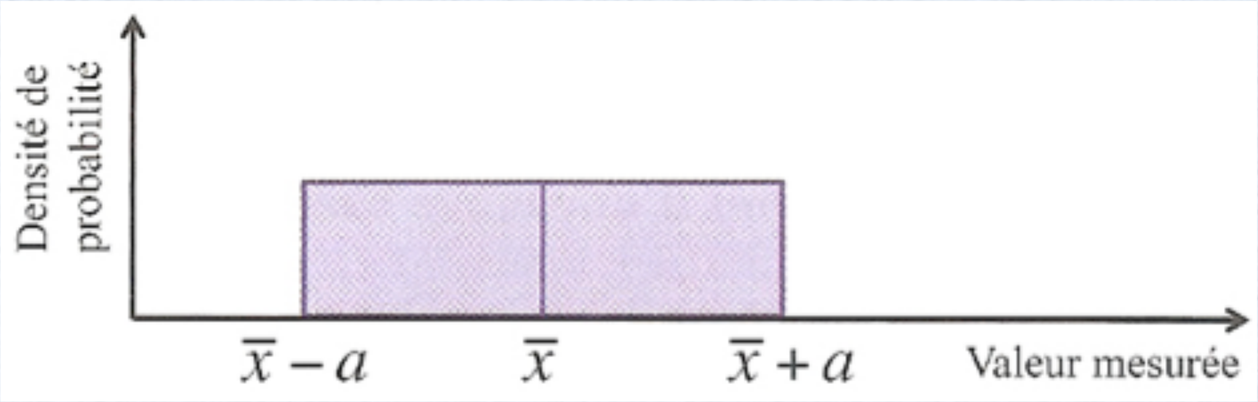
☛ Utilisation : loi utilisée lorsque :

- L'expérience montre que la valeur moyenne possède une très forte probabilité devant les autres.
- Les valeurs extrêmes sont très peu probables.

Exemple :

- pipette **neuve** de 50 mL, avec indication de la tolérance sous la forme ± 0,050 mL.
Indiquer l'incertitude de type B associée :

3/ La loi rectangulaire



Les valeurs ont à priori toutes la même probabilité dans l'intervalle.

Détermination de l'incertitude-type de type B : $u_B(x)$

$$u_B(x) = s = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

☛ Utilisation : Loi utilisée lorsque l'opérateur ne possède pas d'informations suffisantes. Par défaut, il doit alors "éliminer" le choix des lois normale et triangulaire :

Exemple 1 :

- pipette **ancienne** de 50 mL, avec indication de la tolérance sous la forme ± 0,050 mL.

Indiquer l'incertitude de type B associée :

Exemple 2 :

Un manuel donne la valeur du coefficient de dilatation linéique du cuivre pour 20 °C, a_{20}(Cu) comme étant égal à $16{,}52.10^{-6}$ °C^{-1} et énonce simplement que "*l'erreur sur cette valeur ne devrait pas dépasser $0{,}40.10^{-6}$ °C^{-1}*".

Indiquer l'incertitude de type B associée :

Document 5. Bilan sur les cas pratiques

☛ Dans l'essentiel des cas rencontrés, sauf si explicitement précisé par le fabricant, il faut utiliser la **loi rectangulaire**.

Cas rencontrés	Expression de l'incertitude de type B	Exemples
Indication fabricant du type ± a	$u_B(x) = s = \frac{a}{\sqrt{3}}$	Burette, pipette, fiole jaugée, appareil analogique de classe définie, …
Incertitude liée à la lecture de graduations	$u_B(x) = \frac{\frac{1}{2}\text{ graduation}}{\sqrt{3}} = \frac{1\text{ graduation}}{\sqrt{12}}$	Appareil à lecture de graduations : thermomètre, cadran, vernier, réglet, …
Incertitude liée à une résolution d'affichage d	$u_B(x) = \frac{\frac{1}{2}\text{ d}}{\sqrt{3}} = \frac{\text{d}}{\sqrt{12}}$	Balance, thermomètre, chronomètre, multimètre, … numériques
Incertitude liée à un digit (plus petite valeur affichable sur un appareil numérique)	$u_B(x) = \frac{1\text{ digit}}{\sqrt{12}}$	Appareil à affichage numérique en l'absence de valeur de résolution

Document 6. Combinaison & propagation des incertitudes

1/ Mesure directe : présence d'incertitude de type A et B

☞ À partir de là, comment estimer l'incertitude globale sur la mesure ?

Mesure directe d'une grandeur incertitude combinée	
Mesure unique avec plusieurs incertitudes de type B	$u_C(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_{B_i}^2(x)}$
Mesure répétées avec incertitude de type A et incertitude(s) de type B	$u_C(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_{B_i}^2(x) + u_A^2(x)}$

2/ Mesure indirecte : propagation des incertitudes

☞ On veut déterminer la valeur d'une résistance en mesurant l'intensité du courant la traversant et la tension à ses bornes. La loi d'Ohm U = R.I permet de calculer R. Mais comment connaître son incertitude associée ?

Mesure indirecte d'une grandeur y dépendant de plusieurs grandeurs indépendantes non corrélées $x_1, x_2, \dots, x_n$ selon une fonction mathématique $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ incertitude composée	
La fonction f est additive et/ou soustractive $\mathbf{y = a.x_1 \pm b.x_2 \pm \dots}$	$u_C(y) = \sqrt{(a.\,u(x_1))^2 + (b.\,u(x_2))^2 + \cdots}$
La fonction f est un produit/quotient/puissance $\mathbf{y = k.\frac{x_1^a.\,x_2^b \dots}{x_3^c.\,x_4^d \dots}}$	$u_C(y) = \bar{y}.\sqrt{\left(\frac{a.\,u(x_1)}{\overline{x_1}}\right)^2 + \left(\frac{b.\,u(x_2)}{\overline{x_2}}\right)^2 + \left(\frac{c.\,u(x_3)}{\overline{x_3}}\right)^2 + \cdots}$

Document 7.
Incertitude élargie & IC

☞ L'incertitude-type **élargie**, notée **U** a pour but de fournir autour du résultat du mesurage, un intervalle appelé **intervalle de confiance** (IC).

On s'attend, avec un **pourcentage donné**, à ce que cet intervalle contienne une fraction élevée de la distribution des valeurs attribuées au mesurande.
Ce pourcentage exprime un niveau de confiance.

Comment déterminer l'incertitude élargie ?

En **multipliant** l'incertitude estimée, u, par un facteur **k** appelé « **facteur d'élargissement** ».

Incertitude élargie $U = k \times u$

Comment déterminer l'intervalle de confiance IC ?

Si on considère que la meilleure estimation du mesurande est X, alors l'IC est :

$IC = [X - U \,;\, X + U]$

Choix du facteur d’élargissement

☞ Le choix du facteur d’élargissement dépend de plusieurs paramètres :

1/ Utilisation d’une loi de probabilité normale

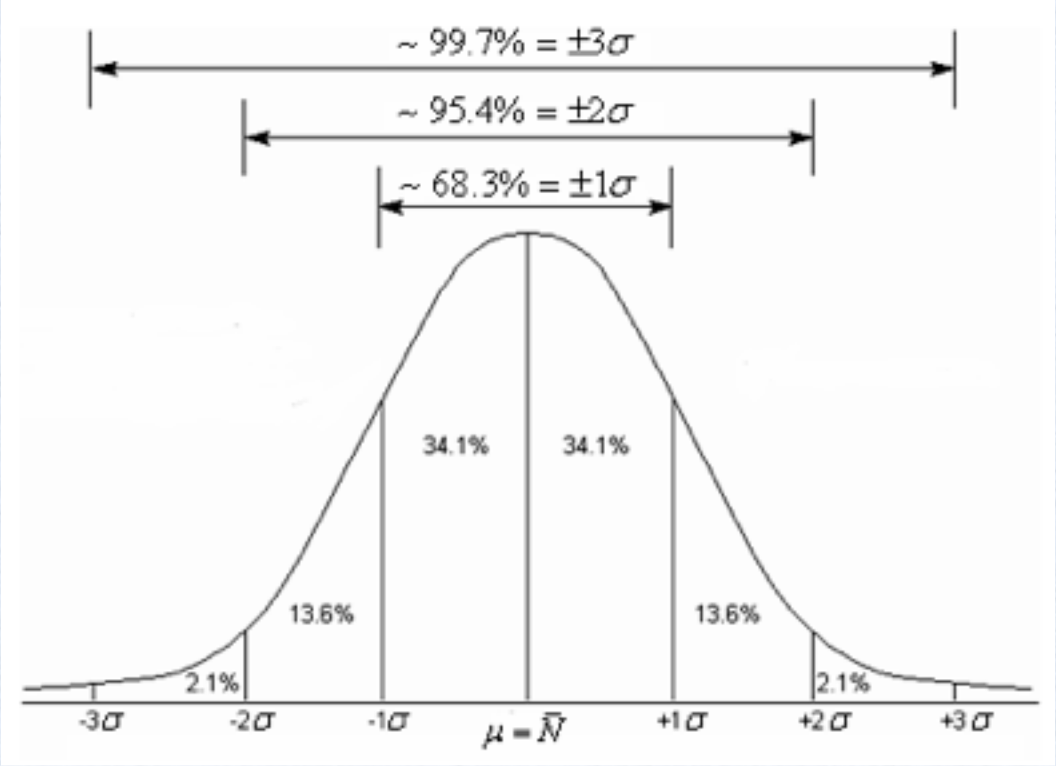
☞ Conditions :

➢ L’estimation de la moyenne du mesurande est obtenue à partir des valeurs x_i qui suivent raisonnablement une loi normale ou à défaut une loi rectangulaire.

➢ Les incertitudes-types $u(x_i)$, obtenues par des évaluations de type A et B, contribuent de manière comparable à l’incertitude composée $u_C(x)$.

➢ Dans ce cas, le mesurande x suit une loi normale et $u_C(x)$ est une bonne estimation de l’écart-type de cette loi.

En règle générale, il faut également un nombre de valeurs $n \geq 30$.



k	**niveau de confiance (%)**
1	68,27
1,645	90
1,96	95
2	95,45
2,576	99
3	99,73

La valeur de k la plus couramment utilisée par les fabricants est 2 ou 3.

2/ Utilisation de la table de Student

☞ Conditions :

➢ On est en présence d'un nombre de valeurs $n < 30$.

➢ Et/ou il y a prédominance d'incertitude de type A pour le calcul de $u_C(x)$, c'est-à-dire que $u_C(x) \simeq u_A(x)$.

➢ On suppose alors que le mesurande x suit une loi normale en utilisant la loi de Student qui tend vers une loi normale lorsque n est grand.

☞ Le facteur est noté t et l'incertitude élargie se calcule par :

$$\mathbf{U = t \times u = t \times u_A = t \times \frac{s_{exp}}{\sqrt{n}}}$$

☞ Comment déterminer t ?

1/ On calcul le degré de liberté ν. Il est défini par : ν = n - 1, avec n le nombre de valeurs.

2/ On choisit la colonne donnant le niveau de confiance voulu.

3/ On relève la valeur du facteur t.

Student t Table						
Degrees of Freedom	Confidence Interval					
	80% $t_{.90}$	90% $t_{.95}$	95% $t_{.975}$	98% $t_{.99}$	99% $t_{.996}$	99.73% $t_{.9985}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	235.800
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	19.207
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	9.219
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	6.620
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.507
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.904
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.530
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.277
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.094
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.975
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.850
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.764
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.694
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.636
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.586
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.544
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.507
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.475
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.447
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.422
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.330
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.270
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.199
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.310

3/ Cas des faibles échantillons

☞ La loi de Student est à priori utilisable cependant, de nombreux laboratoires préfèrent utiliser une autre approche : la **méthode de l'étendue** :

➢ **étendue** d'un échantillon : **ω = valeur max - valeur min**.

➢ **incertitude = s_{exp} = ω / C_n**, avec C_n un coefficient dépendant du nombre n de valeurs, à trouver dans le tableau 1 ci-dessous.

➢ **intervalle de confiance : ± k_1 x ω**, avec k_1 un coefficient dépendant du nombre n de valeurs, à trouver dans le tableau 2 ci-dessous.

☞ tableau 1 :

nombre de déterminations n	2	3	4	5	6	7	8	9
c_n	1,42	1,91	2,23	2,48	2,66	2,82	2,95	3,06
degré de liberté ν	1	2	2,9	3,8	4,7	5,5	6,3	7

☞ tableau 2 :

nombre de détermination n	2	3	4	5	6	7	8	9
k_1 pour α=0,05	6,343	1,230	0,710	0,500	0,395	0,330	0,283	0,250

Document 8. Règles d'écriture des résultats

Règles à respecter sur les valeurs conservées de la grandeur et de son incertitude

1	On ne conserve que **2 chiffres significatifs** pour une incertitude Exemple : u(m) = 0,459665... g = 0,46 g
2	Le nombre de chiffres significatifs d'une incertitude n'est tronquée qu'à la fin du calcul de cette incertitude (important pour les incertitudes composées)
3	L'estimation de la grandeur mesurée a un nombre de chiffres significatifs limité au même ordre de grandeur que l'incertitude. Exemple : si m = 10,53224... g avec u(m) = 0,46 g alors m = 10,53 g

☞ Écriture :

$$X_{k=} = (\bar{x} \pm U(x))\ \text{unité} \quad \text{ou} \quad X = (\bar{x} \pm U(x))\ \text{unité avec } k =$$

☞ Exemples :

$m_{k = 2}$ = (100,02147 ± 0,00070) g   ou   m = (100,02147 ± 0,00070) g avec k = 2

$$m_{t_{95\,\%}=2{,}262} = (18{,}487 \pm 0{,}045)\ \text{g} \quad \text{ou} \quad m = (18{,}487 \pm 0{,}045)\ \text{g avec } t_{95\,\%} = 2{,}262$$

Document 9. Pour aller plus loin... Acceptabilité des valeurs mesurées

☞ Deux approches pour accepter ou non une valeur mesurée :

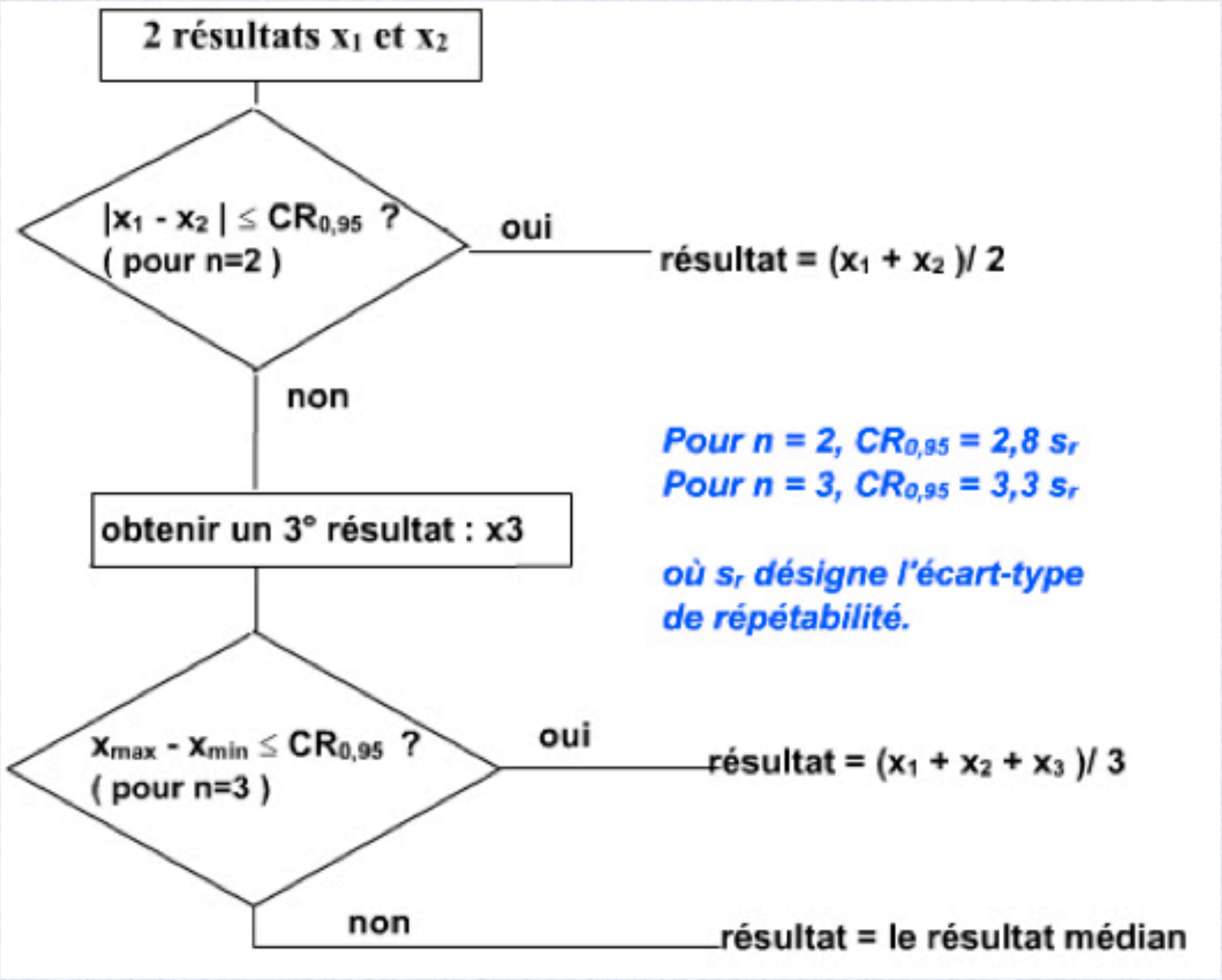
1/ Faire plusieurs mesures sur le spécimen à analyser puis vérifier si les valeurs sont compatibles. On en déduit la valeur retenue.

2/ Faire en // le mesurage sur le spécimen à analyser et sur un étalon de contrôle. Si la valeur mesurée sur l'étalon est acceptable alors celle sur le spécimen l'est aussi.

1/ Utilisation d'un logigramme

Un des moyens "simples" pour savoir si des mesures réalisées sont compatibles et acceptables est d'utiliser un écart-type **inter-laboratoires**, appelé **écart-type de répétabilité** s_r. Cela permet de s'affranchir de calculs "fastidieux".

L'utilisation d'un **logigramme de compatibilité** va donner la réponse.



2/ Utilisation d'un étalon de contrôle

☞ Principe :

On utilise un étalon de contrôle possédant une valeur conventionnelle servant de référence y_{ref} , une incertitude U et un intervalle d'acceptabilité encadrant cette valeur : (L_{sup} - L_{inf})

1. Un mesurage sur le "spécimen" à analyser : valeur $y_{spé}$;
2. Un mesurage sur l'étalon de contrôle : valeur y_{EC} ;
3. Si la valeur mesurée pour l'étalon est acceptable, alors celle du spécimen le sera.