LES PLANS d'EXPÉRIENCE

http://ligodin.free.fr
ligodin@free.fr

Introduction aux plans d'expériences

☛ Les plans d'expériences sont utilisés dans les études industrielles en recherche-développement. Ils interviennent dans de nombreux domaines industriels.
On peut notamment citer :

- ➢ industries chimiques, pétrochimiques, pharmaceutiques et cosmétiques ;
- ➢ industries agro-alimentaires ;
- ➢ industries mécaniques et automobiles ;
- ➢ industries métallurgiques.

☛ Leur utilisation vise les buts suivants :

- La *détermination des facteurs clés* dans la conception d'un nouveau produit ou d'un nouveau procédé ;
- L'*optimisation des réglages* d'un procédé de fabrication ou d'un appareil de mesure ;
- La *prédiction par modélisation* du comportement d'un procédé.

☛ Le succès de la démarche originale des plans d'expériences réside dans la **possibilité d'interprétation de résultats expérimentaux avec un effort minimal sur le plan expérimental** : la minimisation du nombre nécessaire d'expériences permet un gain en temps et en coût financier.

☛ Il faut néanmoins comprendre que les plans d'expériences ne sont pas un outil destiné a priori à la recherche fondamentale car ils ne permettront jamais une explication du phénomène physico-chimique étudié.

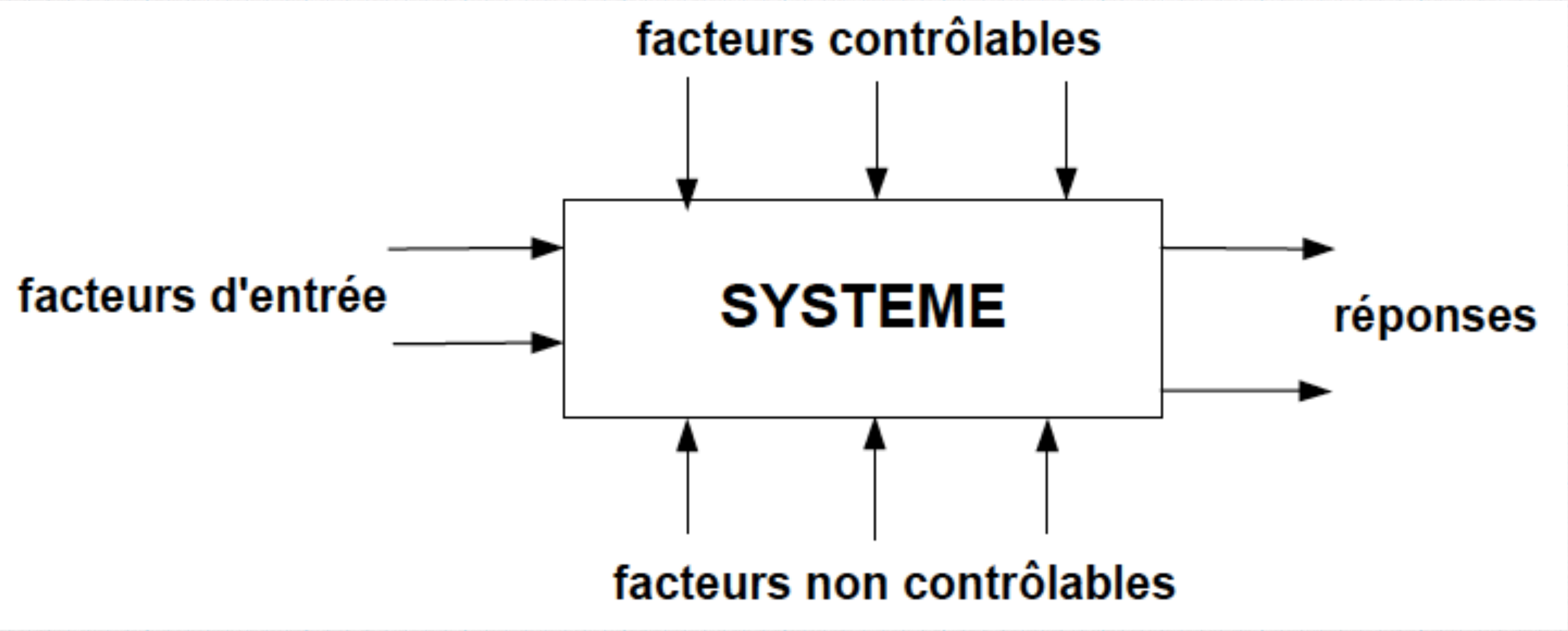
AVERTISSEMENTS

☛ *1/ les calculs peuvent paraître parfois pénibles à réaliser, ils constituent en fait une étape nécessaire pour la compréhension de la méthodologie ; une fois cette phase maîtrisée, de nombreux logiciels peuvent venir en aide et exécuter les calculs, comme par exemple MINITAB.*

☛ *2/ Dans ce cours on se limitera à la présentation des plans factoriels complets et fractionnaires à deux niveaux.*

1/ Vocabulaire de base des plans d'expérience

☛ Le scientifique est souvent amené à comprendre comment réagit un système en fonction des facteurs susceptibles de le modifier. Pour visualiser cette évolution, il **mesure une réponse** et va ensuite essayer d'établir des **relations de cause à effet entre les réponses et les facteurs**.



☛ Parmi les **facteurs** on distinguera :

• les **facteurs contrôlables** qui dépendent directement du choix du technicien (pression, température, matériau …) ;
• les **facteurs non contrôlables** qui varient indépendamment du choix du technicien (conditions climatiques, environnement d'utilisation…) ;
• les **facteurs d'entrée** dont on cherche à analyser une influence (matière première, vitesse d'agitation, température, rendement …)

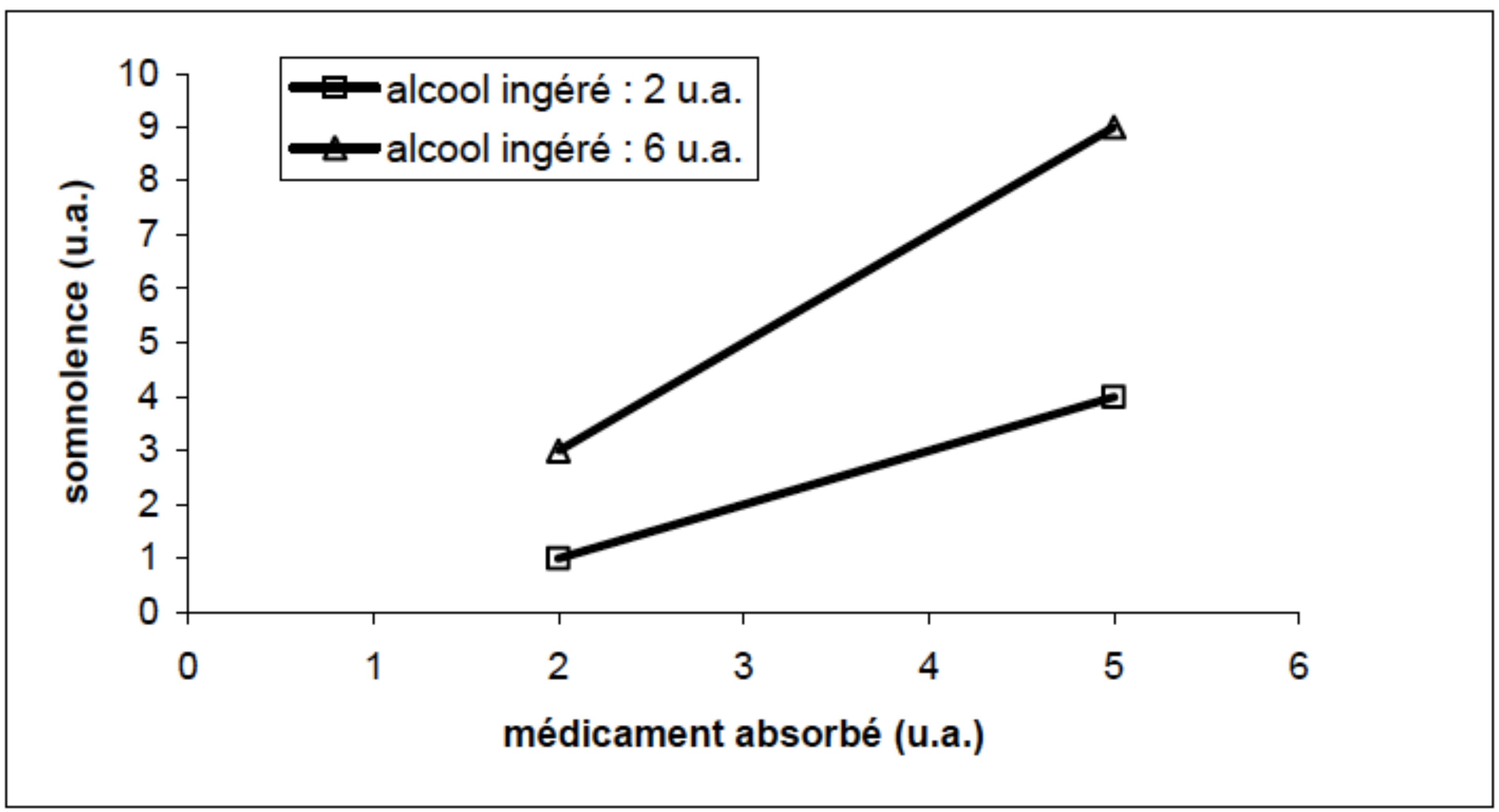
☛ Les **facteurs étudiés** dans un plan d'expériences sont bien entendu les **facteurs d'entrée**. Un facteur est une grandeur le plus souvent mesurable mais il peut s'agir d'une grandeur qualitative comme les différents lots d'une matière première.

☛ La **réponse est la grandeur mesurée** à chaque essai ; le plan vise à déterminer quels facteurs l'influencent ou quelle est son évolution en fonction de ceux-ci.
Cette grandeur est le plus souvent mesurable mais elle peut également être qualitative.
Dans ce cas, ce peut être par exemple une appréciation visuelle sur l'état d'une surface ou une appréciation bon, moyen ou mauvais sur un produit alimentaire.

☛ Une notion importante est celle d'**interaction entre deux facteurs d'entrée**. On parle d'interaction entre deux facteurs A et B quand l'effet du facteur A sur la réponse va dépendre de la valeur du facteur B. On peut citer deux exemples :

• une étude sur l'usure des pneus (réponse) montre une interaction entre la vitesse et la pression de gonflage (facteurs) ;

• une étude sur la somnolence a montré une interaction entre la quantité d'alcool ingéré et la quantité d'un médicament particulier absorbé. Le graphique suivant montre les valeurs de la somnolence mesurée en unité arbitraire de 0 à 10 en fonction des deux autres facteurs mesurés également avec des unités arbitraires.



Q/ Commenter ce graphique :

2/ Étapes d'une étude par plans d'expériences

2.1. Détermination de la réponse et des facteurs d'étude

☛ L'étude doit avant tout avoir un but précis : minimiser un coût de fabrication, chercher les paramètres influents ...

A ce niveau, il est important de rassembler l'ensemble des personnes ayant à titre divers une connaissance du sujet : l'ingénieur de production, le responsable du laboratoire d'analyses, le technicien en charge de la fabrication, l'opérateur de fabrication…

Tous peuvent fournir une information essentielle pour les questions suivantes :

- choix de la réponse la plus judicieuse ;
- moyens de mesure adaptés ;
- facteurs potentiellement influents ;
- choix du domaine d'étude de ces facteurs ;
- éventuelles interactions à rechercher ;
- contrôle des facteurs non étudiés.

☛ La connaissance du sujet acquise auparavant dans l'entreprise peut rendre de grands services à cette étape. Le résultat final peut avoir des **conséquences catastrophiques** pour l'entreprise **si un facteur oublié se trouve être un facteur d'influence**.

Une difficulté importante est la détermination du domaine d'étude. Le domaine de variation des facteurs doit permettre de couvrir le domaine réel d'utilisation des facteurs… mais pas plus.
Ainsi le domaine ne doit pas être trop large… mais à l'inverse pas trop étroit si on cherche à déterminer une influence possible. Dans ce dernier cas des limites trop étroites risque de "noyer" une influence dans le "bruit" de l'erreur aléatoire due aux incertitudes de mesure.

2.2. Choix d'un modèle

☛ Les **plans d'expériences** dits **factoriels** utilisent tous le modèle mathématique suivant qui relient la réponse y aux facteurs x_1, x_2, …x_i …x_n. Ce modèle théorique est postulé a priori. Il s'agit d'un modèle polynomial.

$$y = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_n \cdot x_n + \sum_{i,j=1 \;\; i \neq j}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i,j,k=1 \;\; i \neq j \neq k}^{n} a_{ijk} \cdot x_i \cdot x_j \cdot x_k + \cdots$$

☛ où a_0, a_1 … sont les **coefficients** du polynôme ; x_1, ... sont les **facteurs**.
Les termes produits de type par exemple, $a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$ correspondent aux **interactions**.

<u>Exemple</u> : pour un plan factoriel à 3 facteurs x_1, x_2 et x_3, on obtient :

$$y = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + a_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + a_{123} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Document 1 : Choix des Expériences

☛ Dans un premier temps, une étude mathématique très simplifiée montrera quels sont les critères à retenir pour le choix des essais à effectuer.

1/ Régression multilinéaire

☛ Dans une étude expérimentale, quand on cherche à relier une grandeur physique y et une grandeur physique x, on utilise souvent une technique de **régression linéaire** de y par rapport à x qui consiste à définir une relation du type :

$$y = a.\,x + b$$

☛ On cherche les valeurs des paramètres a et b de façon que la droite passe au mieux par l'ensemble des points expérimentaux. On utilise une méthode dite "des moindres carrés" qui minimise la somme des carrés des résidus r_i. Le résidu r_i se définit comme l'écart entre la valeur expérimentale y_i obtenue pour une valeur x_i et la valeur calculée à partir du modèle $\hat{y}_i$

$$r_i = y_i - \hat{y}_i$$

☛ Les plans d'expérience exigent l'utilisation de la technique de **régression multilinéaire** pour déterminer les coefficients d'un modèle polynômial. Les calculs permettant de les obtenir utilisent le calcul matriciel dans le cas général et sont effectués maintenant au moyen d'ordinateurs. Le principe est toujours celui d'une méthode "des moindres carrés".

Pour effectuer le calcul il faut évidemment un **nombre d'expériences** (nombre de relations) **au moins égal au nombre de coefficients** (nombre d'inconnues).

Dans la suite de l'exposé, un exemple montrera que le choix des expériences à réaliser influe directement sur la largeur de l'intervalle de confiance des coefficients.

2/ Variables codées ou variables centrées réduites

☛ L'utilisation des **variables centrées réduites** présente l'intérêt de pouvoir généraliser la théorie des plans d'expériences quels que soient les facteurs ou les domaines d'études retenus. **Remplacer les variables naturelles par les variables codées** va permettre d'avoir pour chaque facteur le même domaine de variation (**entre -1 et +1**) et de pouvoir ainsi comparer entre eux l'effet des facteurs.

☛ Le niveau bas est ainsi codé - 1 alors que le niveau haut est codé + 1.

EXEMPLE : Passage d'une variable naturelle à une variable codée

☛ L'application suivante illustre le passage de la variable naturelle à la variable codée. On choisit d'abord pour un facteur son domaine d'étude. Par exemple, la température va varier de 10 à 40°C. 10 et 40°C correspondent respectivement aux niveaux bas et haut du facteur.

1/ Coder les températures 10°C et 40°C :

2/ On note ici t la variable codée et T la variable naturelle. On peut les lier par la relation où T_0 est le milieu de l'intervalle du domaine d'étude et ΔT la moitié de la largeur du domaine d'étude, T_0 et ΔT étant exprimé en variable naturelle. Donner les valeurs de T_0 et ΔT :

3/ Donner la relation entre t, T, T_0 et ΔT :

4/ Les variables centrées réduites sont sans dimension. Donner la valeur de la variable centrée réduite correspondant à une température de 20°C :

3/ Application simple de calcul des coefficients

☛ Une application simple est fournie par le plan d'expériences suivant où les calculs peuvent s'effecteur manuellement. On examine l'influence de la pression et de la température (**deux facteurs**) sur le rendement y d'une réaction chimique (**réponse**). Le modèle choisi a priori est le suivant :

$$y = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2$$

où x_1 et x_2 représentent respectivement les variables codées représentatives des facteurs pression et température.

☛ Le choix des expériences réalisées sera explicité par la suite. On utilise un tableau nommé **matrice d'expériences** pour récapituler l'ensemble des essais.

☛ Elle comprend plusieurs colonnes; la première identifie le nombre d’essais, les suivantes indiquent les états des facteurs exprimés en "unités codés", chaque colonne étant représentative d'un facteur. La dernière colonne indique les réponses obtenues pour chaque essai. Les lignes inférieures rappellent les valeurs des niveaux en unités naturelles.

N° essais	Pression	Température	rendement
1	-1	-1	60
2	+1	-1	78
3	-1	+1	63
4	+1	+1	89
Niveau -1	2 bar	50°C	/
Niveau +1	4 bar	70°C	/

1/ À partir du modèle, écrire les 4 relations ci-contre, en remplaçant les variables x_1 et x_2 par leurs valeurs codées dans chaque expérience :

2/ Résoudre le système d'équations :

3/ Écrire alors le modèle mathématique $y = f(x_1, x_2)$:

☛ Dans la suite de l'exposé on examinera l'interprétation de ce type de résultats.

4/ Importance du choix des points expérimentaux

☛ Le succès des plans d'expériences réside dans la **diminution du nombre** nécessaire **d'essais** pour obtenir un maximum d'informations. Néanmoins il ne suffit pas d'effectuer un certain nombre d'essais : le **choix des essais est fondamental** pour l'obtention d'une précision optimale dans la détermination des coefficients.

Dans l'exemple suivant on va comparer la précision des estimations de coefficients pour 3 matrices d'expériences différentes : autrement dit on calculera la variance de chaque coefficient.

La pression, la température et la masse catalyseur sont les facteurs examinés pour la réponse qui est le rendement d'une réaction : 4 essais sont réalisés avec 2 niveaux par facteur. On définit alors les **matrices d'expériences des plans 1, 2 et 3** avec la colonne de la réponse (le rendement). On envisage le modèle suivant pour chacun des plans :

$$y = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3$$

où x_1, x_2 et x_3 représentent respectivement les variables représentatives des facteurs pression, température et masse de catalyseur.

PLAN 1

N° essais	Pression	Température	Masse catalyseur	rendement
1	+1	+1	+1	Y_1
2	-1	+1	+1	Y_2
3	+1	-1	+1	Y_3
4	+1	+1	-1	Y_4
Niveau -1	2 bar	50°C	1 kg	/
Niveau +1	4 bar	70°C	2 kg	/
Niveau 0	3 bar	60°C	1,5 kg	/

1/ À partir du modèle, écrire les 4 relations ci-dessous, en remplaçant les variables x_1, x_2, et x_3 par leurs valeurs codées dans chaque expérience :

2/ Exprimer chaque coefficient a_0, a_1, a_2, et a_3 en fonction des réponses Y_i (i = 1, 2, 3 et 4) :

PLAN 2

N° essais	Pression	Température	Masse catalyseur	rendement
1	-1	-1	+1	Y_5
2	+1	-1	-1	Y_6
3	-1	+1	-1	Y_7
4	+1	+1	+1	Y_8
Niveau -1	2 bar	50°C	1 kg	/
Niveau +1	4 bar	70°C	2 kg	/
Niveau 0	3 bar	60°C	1,5 kg	/

PLAN 3

N° essais	Pression	Température	Masse catalyseur	rendement
1	0	0	0	Y_9
2	+1	+1	0	Y_{10}
3	+1	0	+1	Y_{11}
4	0	+1	+1	Y_{12}
Niveau -1	2 bar	50°C	1 kg	/
Niveau +1	4 bar	70°C	2 kg	/
Niveau 0	3 bar	60°C	1,5 kg	/

☛ En utilisant la même méthode, on aboutit aux solutions suivantes pour les coefficients :

$$\text{Plan 2 :}\begin{cases} a_0 = \dfrac{+Y_5 + Y_6 + Y_7 + Y_8}{4} \\ a_1 = \dfrac{-Y_5 + Y_6 - Y_7 + Y_8}{4} \\ a_2 = \dfrac{-Y_5 - Y_6 + Y_7 + Y_8}{4} \\ a_3 = \dfrac{+Y_5 - Y_6 - Y_7 + Y_8}{4} \end{cases}$$

$$\text{Plan 3 :}\begin{cases} a_0 = Y_9 \\ a_1 = \dfrac{-Y_9 + Y_{10} + Y_{11} - Y_{12}}{2} \\ a_2 = \dfrac{-Y_9 + Y_{10} - Y_{11} + Y_{12}}{2} \\ a_3 = \dfrac{-Y_9 - Y_{10} + Y_{11} + Y_{12}}{2} \end{cases}$$

☛ **La variance V(Y) (ou l'écart-type) de chacune des réponses Y_i est considérée comme identique en chaque point du domaine**. Cette hypothèse est couramment admise dans les études de plans d'expériences.

3/ Calculer la variance de chaque plan :

Remarque :

On rappelle que si X et Y sont 2 variables aléatoires indépendantes et $\boldsymbol{\alpha}$ *un réel :*

$$V(\boldsymbol{\alpha}.X) = \boldsymbol{\alpha}^2.V(X) \text{ et } V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$$

4/ Que constatez-vous ? Conclure.

<u>Remarque</u> : Ceci montre donc que **la matrice d'expériences n'est pas quelconque** : elle doit être choisie suivant des critères précis.

5/ Matrice des effets

5.1. Constitution

☛ La matrice des essais à réaliser pour obtenir le plan d'expériences optimal se déduit en fait des critères permettant d'obtenir les coefficients avec le maximum de précision. Le système d'équations à résoudre doit présenter des coefficients devant les inconnues (qui sont les coefficients du modèle à déterminer) pouvant se mettre sous la forme d'une matrice nommée **matrice des effets**.

Par exemple, pour le plan 2, la matrice des effets s'écrira sous la forme :

$$\begin{aligned} a_0 - a_1 - a_2 + a_3 &= Y_5 \\ a_0 + a_1 - a_2 - a_3 &= Y_6 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 &= Y_7 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= Y_8 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce type de matrice est dite **matrice de Hadamard**.

☛ *Hadamard a montré que la **matrice X** devait vérifier la condition :*

$$ {}^{t}X \cdot X = N \cdot I $$

où ^{t}**X** *est la **matrice transposée de X** (obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de X), I la **matrice identité** et **N le nombre d'expériences** réalisées. N doit être un multiple de 4.*

*Par exemple, on verra que **pour un plan complet** à **n facteurs**, le **nombre d'expériences N** sera égal à :*

$$ \mathbf{N = 2^{n}} $$

Soit 8 expériences avec 3 facteurs permettant la détermination des 8 coefficients du modèle,
16 expériences avec 4 facteurs …

5.2. Calcul des coefficients

☛ Dans le cas d'une matrice de Hadamard, les coefficients peuvent aisément se calculer avec une simple calculatrice ou un tableur.

On reprend pour cela l'exemple du plan 2 traité précédemment (cf diapo 20) : en fait on appelle, matrice des effets dans les plans d'expériences, le tableau suivant plus complet que la stricte matrice des effets.

Dans ce tableau figure, les colonnes du numéro d'essai, des termes du polynôme de la réponse, ainsi qu'une ligne inférieure donnant la valeur calculée du coefficient à estimer.

N° essais	Constante	x_1	x_2	x_3	Réponse
1	+1	-1	-1	+1	Y_5
2	+1	+1	-1	-1	Y_6
3	+1	-1	+1	-1	Y_7
4	+1	+1	+1	+1	Y_8
Coefficient	$a_0 = 1/4.(Y_5 + Y_6 + Y_7 + Y_8)$	$a_1 = 1/4.(-Y_5 + Y_6 - Y_7 + Y_8)$	$a_2 = 1/4.(-Y_5 - Y_6 + Y_7 + Y_8)$	$a_3 = 1/4.(Y_5 - Y_6 - Y_7 + Y_8)$	/

1/ Qu'observez-vous au sujet des coefficients ?

2/ Que constatez-vous au sujet du coefficient a_0 ?

☛ Cette méthode de calcul est générale dans les plans d'expériences factoriels.

5.3. Intervalle de confiance des coefficients

☛ On étudie maintenant la variance d'un coefficient pour connaître son intervalle de confiance.

Dans un plan factoriel complet ou fractionnaire de N essais, les réponses Y_i et les coefficients a_i sont des valeurs de variables aléatoires. On a vu que tout coefficient a_i du modèle se calcule par une formule du type :

$$a_i = \pm \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i \quad \text{donc} \quad V(a_i) = \frac{1}{N^2} . \sum_{i=1}^{N} V(Y_i)$$

☛ On introduit alors σ^2_{n-1} (variance connue des mesures) ou s^2 (variance estimée des mesures). σ_{n-1} ou s sont des écarts-types expérimentaux.

Dans le cas où on dispose d'une connaissance importante sur le domaine étudié et où on peut donc se baser sur les résultats tirés d'un "historique", on utilisera σ.

☛ Dans le calcul suivant on suppose que l'écart-type est inconnu a priori. La variance s^2 des variables Y_i étant supposée identique sur le domaine d'étude (erreur aléatoire constante pour toutes les réponses Y_i) on en déduit que :

$$V(a_i) = N.V(Y)/N^2 = V(Y)/N$$

☛ On admet que chaque coefficient appartient à une population normale.

Avec un risque de 5%, si la variance estimée des mesures s^2 est connue, une estimation ponctuelle de l'écart-type de la variable aléatoire a_i est $s(a_i)$:

$$s(a_i) = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

☛ L'intervalle de confiance de tout coefficient est alors :

$$IC = a_i \pm t_{0,975} \cdot \frac{s}{\sqrt{N}}$$

☛ où t est la variable de Student avec le nombre de degrés de liberté utilisés pour la détermination de s.

La détermination de l'intervalle sera complète quand on disposera des essais permettant d'obtenir l'écart-type s de la mesure.

☛ La vérification de la signification statistique d'un coefficient sera alors entreprise. Pour simplifier, on admettra qu'un coefficient est significatif si son intervalle de confiance n'englobe pas la valeur 0. Si la valeur 0 appartient à l'intervalle de confiance du coefficient, on en déduira que le coefficient n'est pas significativement différent de 0 pour le risque α envisagé.

Document 2 : Plans factoriels complets

Pour alléger les notations dans la suite de l'exposé, on utilisera les notations suivantes :

facteur et sa variable : A, B, C …
colonne de termes (colonne de -1 et +1) : **A , B , C …** (gras)
coefficient (appelé effet ou interaction par la suite) : *A , B , C …* (italique)

I et I font référence à la moyenne respectivement comme valeur numérique et comme colonne de termes tous égaux à +1.

1/ Construction des plans factoriels complets

☛ Un **plan factoriel complet** est un plan pour lequel toutes les combinaisons possibles aux limites du domaine d'étude auront été réalisées : c'est le nombre maximal d'essais pour un plan d'expériences factoriel. Le **nombre d'essais N** se calcule d'après la formule suivante : $\mathbf{N = 2^k}$ où k est le nombre de facteurs.

☛ Le **nombre d'essais** est exactement **égal** au **nombre de coefficients** du modèle à déterminer. On vérifie bien ceci pour les plans 2^2 et 2^3 :

Plan 2^2 : facteurs A et B : **4 expériences** : $y = a_0 + a_1 \cdot A + a_2 \cdot B + a_{12} \cdot A \cdot B$

Plan 2^3 : facteurs A, B et C : **8 expériences** :
$y = a_0 + a_1 \cdot A + a_2 \cdot B + a_3 \cdot C + a_{12} \cdot A \cdot B + a_{13} \cdot A \cdot C + a_{23} \cdot B \cdot C + a_{123} \cdot A \cdot B \cdot C$

Plan 2^4 : facteurs A, B, C et D : **16 expériences** :
$y = a_0 + a_1 \cdot A + a_2 \cdot B + a_3 \cdot C + a_4 \cdot D + a_{12} \cdot A \cdot B + a_{13} \cdot A \cdot C + a_{14} \cdot A \cdot D + a_{23} \cdot B \cdot C + a_{24} \cdot B \cdot D + a_{34} \cdot C \cdot D + a_{123} \cdot A \cdot B \cdot C + a_{124} \cdot A \cdot B \cdot D + a_{134} \cdot A \cdot C \cdot D + a_{234} \cdot B \cdot C \cdot D + a_{1234} \cdot A \cdot B \cdot C \cdot D$

☛ Les matrices d'expériences se construisent selon les tableaux suivants pour les cas des plans 2^2 et 2^3 avec des facteurs A, B et C.

N° essai	A	B
1	- 1	- 1
2	1	- 1
3	- 1	1
4	1	1

N° essai	A	B	C
1	- 1	- 1	- 1
2	1	- 1	- 1
3	- 1	1	- 1
4	1	1	- 1
5	- 1	- 1	1
6	1	- 1	1
7	- 1	1	1
8	1	1	1

☛ Plus généralement, la matrice d'expériences comporte k colonnes pour les facteurs principaux et 2^k lignes soit 2^k essais. Elle se construit selon la **règle suivante** :

- colonne du 1^er facteur : alternance de -1 et +1
- colonne du 2^ème facteur : alternance de -1 et +1 de 2 en 2
- colonne du 3^ème facteur : alternance de -1 et +1 de 4 en 4
- colonne du 4^ème facteur : alternance de -1 et +1 de 8 en 8

et ainsi de suite pour un nombre plus élevé de facteurs.

En adoptant ces **règles empiriques**, la **matrice des effets est une matrice de Hadamard**.

2/ Application au fonctionnent d'un pistolet à peinture

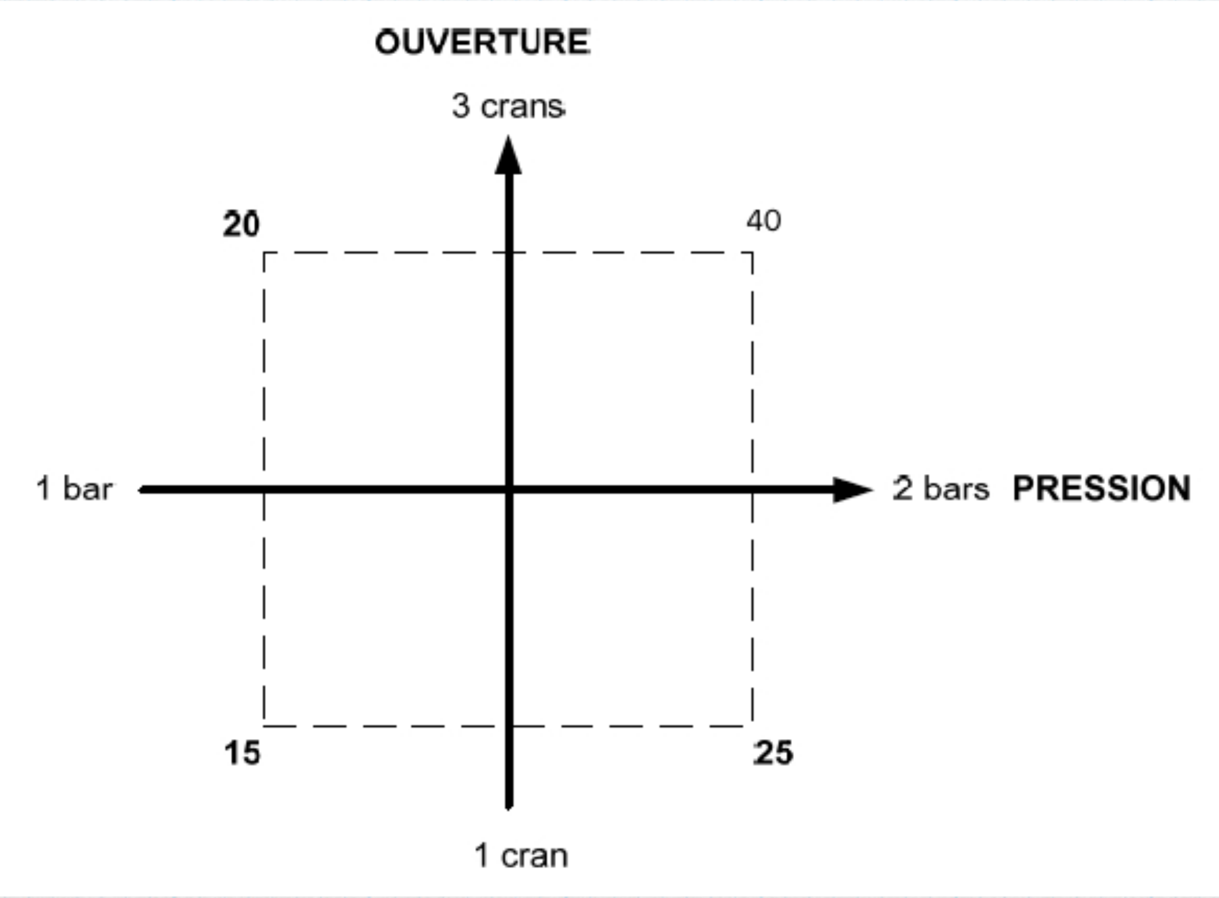
2.1. Présentation de l'étude

☛ On considère le plan d'expériences visant à étudier les conditions de fonctionnement d'un pistolet à peinture servant à appliquer une couche de vernis sur des objets. **Deux facteurs sont étudiés** : l'ouverture du pistolet (facteur A) et la pression (facteur B). La réponse est la couleur obtenue allant de 0 (noir) à 60 (jaune).

1/ Préciser le type de plan choisi :

2/ Compléter la matrice d'expériences suivante, fournie avec les résultats expérimentaux obtenus :

N° essais	Ouverture (A)	Pression (B)	Couleur
1			$Y_1 = 15$
2			$Y_2 = 20$
3			$Y_3 = 25$
4			$Y_4 = 40$
Niveau -1	1 cran	1 bar	/
Niveau +1	3 crans	2 bar	/
Niveau 0	2 cran	1,5 bar	/



2.2. Calculs des effets et interactions

☛ Dans un premier temps, on utilise l'interprétation qualitative ; l'effet calculé est nommé **effet global** de l'ouverture sur la couleur. On note, $E_{\text{Ouverture global}}$, l'effet global de l'ouverture sur la couleur.

1/ Calculer l'effet $E_{\text{Ouverture global}}$:

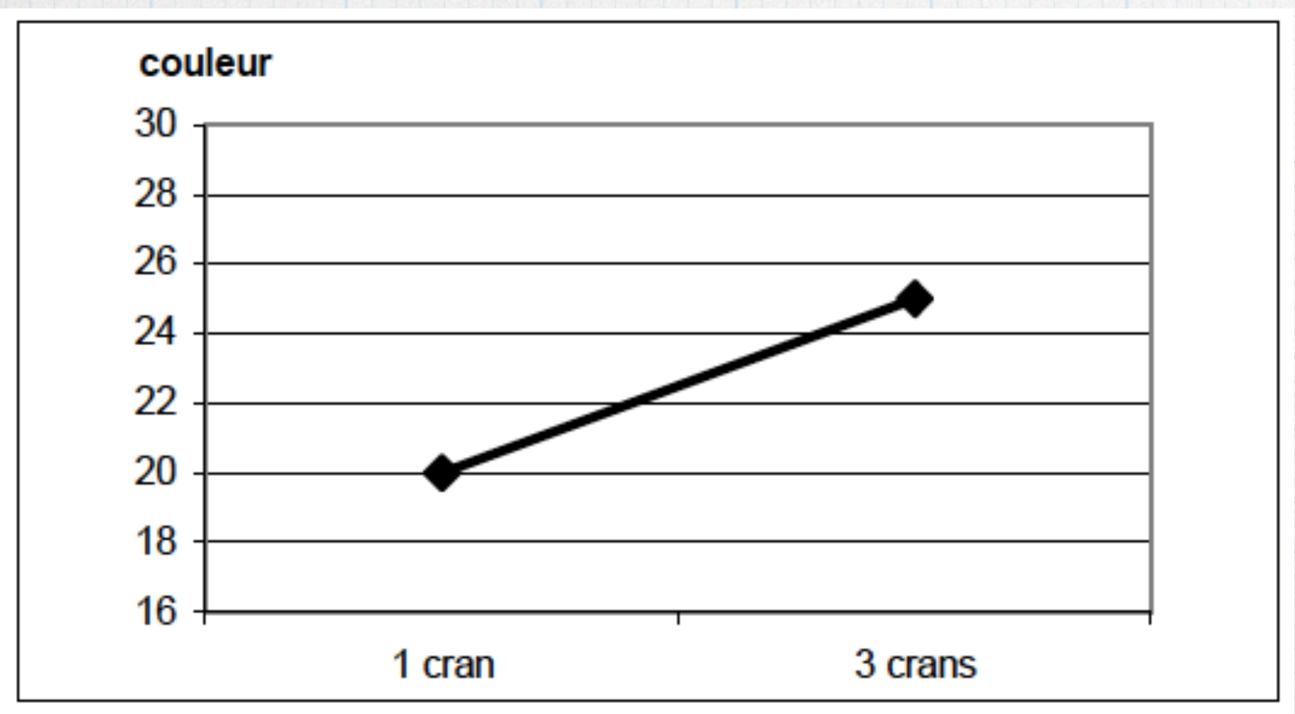
2/ Faire de même pour l'effet global sur la pression : $E_{\text{Pression global}}$:

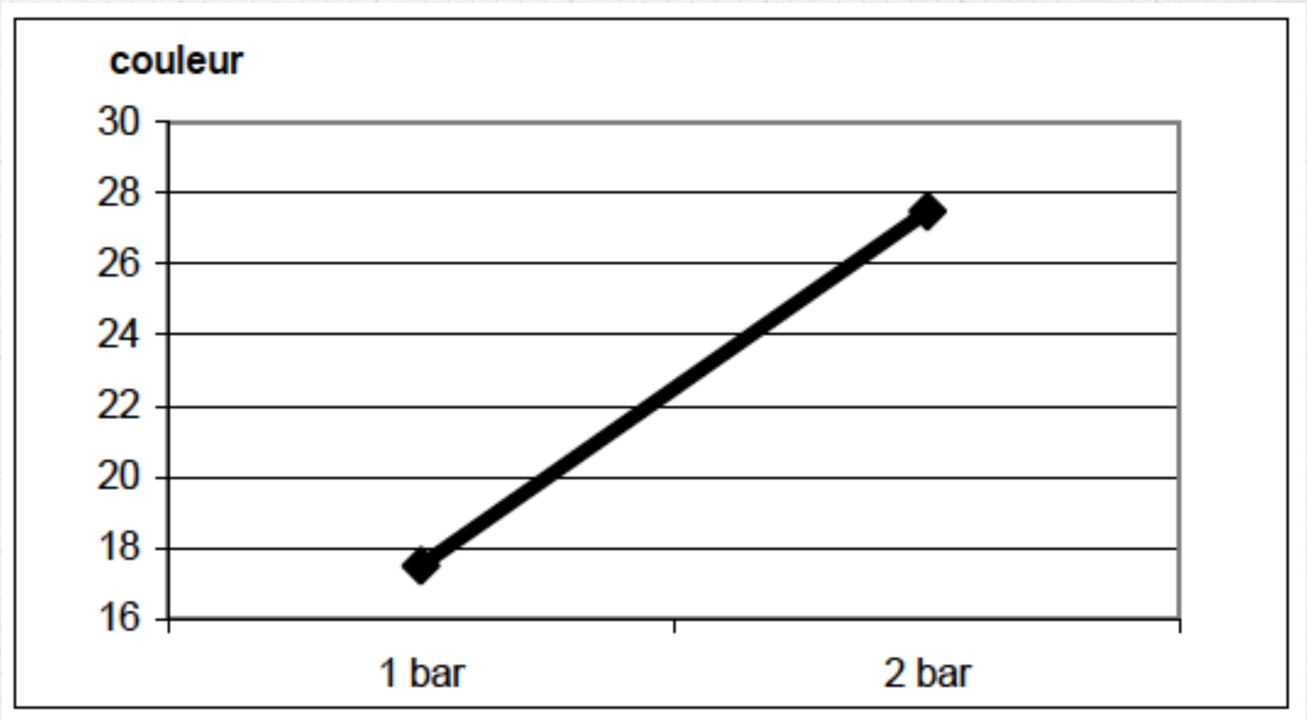
☛ Dans un second temps, on nommera **effet** d'un facteur, la valeur de l'effet global divisé par 2, ce qui est aussi nommé dans la littérature : **l'effet moyen** du facteur.

Remarque *: les logiciels, MINITAB notamment, utilisent parfois dans leur exploitation le nom d'effet pour l'effet global et de coefficient pour l'effet moyen (ce qui se comprend bien comme on va le voir)*

3/ Calculer l'effet moyen sur l’ouverture $E_{\text{Ouverture moyen}}$, et sur la pression $E_{\text{Pression moyen}}$:

☛ Les graphiques suivants illustrent ces effets moyens positifs :





4/ Interpréter qualitativement ces effets moyens à l'aide des 2 graphiques précédents :

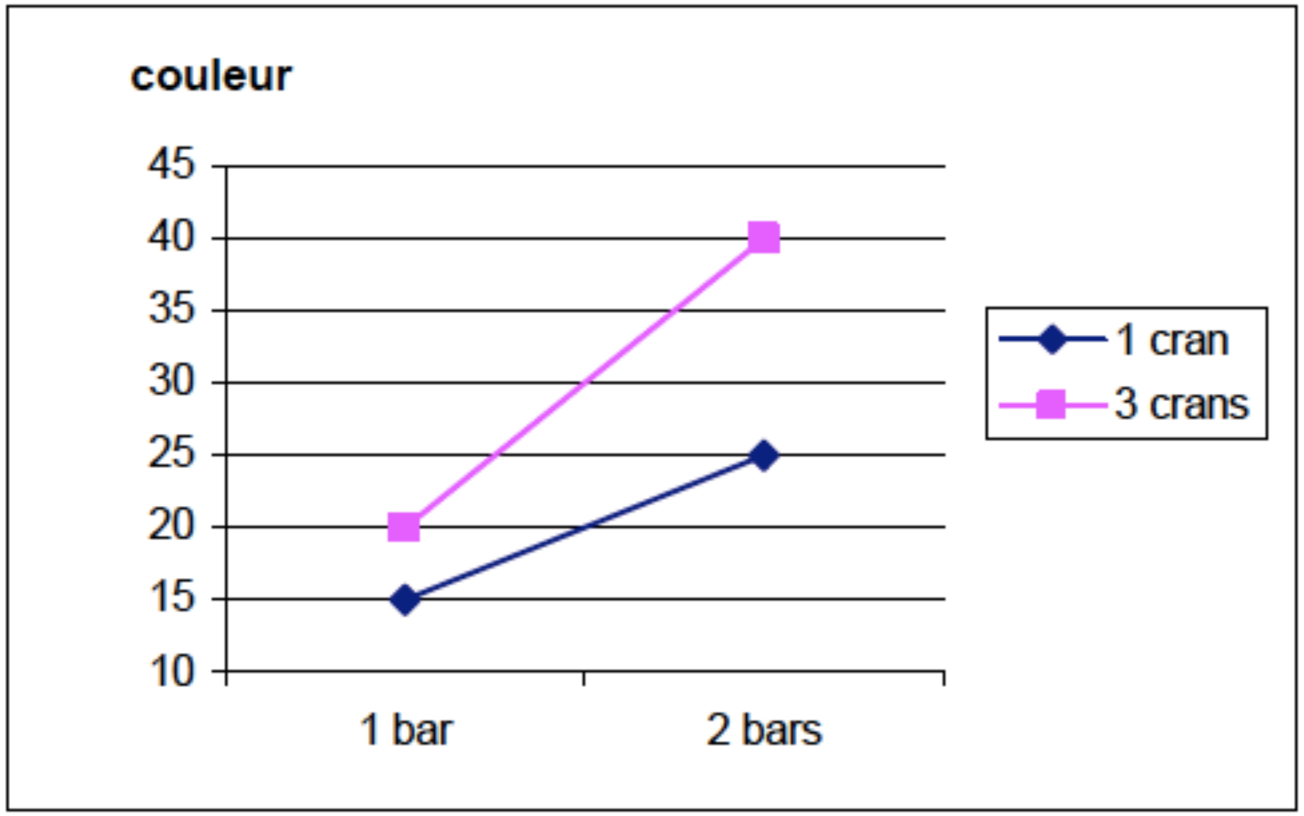
☛ Dans un troisième temps, On recherche maintenant si l'effet de la pression dépend de l'ouverture, autrement dit, s'il existe une **interaction entre pression et ouverture**.

$E_{\text{Pression (Ouverture 3 crans)}} = 1/2.[-Y_2 + Y_4] = 10$
$E_{\text{Pression (Ouverture 1 cran)}} = 1/2.[-Y_1 + Y_3] = 5$

On peut déterminer maintenant l'**effet de l'interaction** de la même façon que l'effet moyen d'un facteur en considérant la demi-différence entre les deux valeurs précédentes.

5/ Donner cet effet, que l'on notera $I_{\text{Ouverture Pression}}$:

☛ Une représentation simple consiste à tracer le graphique des interactions en prenant la moyenne des données pour une condition expérimentale. Les droites du graphique n'étant pas parallèles, on en déduit aussi qu'il y a interaction entre la pression et l'ouverture. Une ouverture plus importante augmente l'effet de la pression.



☛ On obtiendrait la même valeur d'interaction si on permutait le rôle de l'ouverture et de la pression.

En conclusion, pour obtenir un jaune plus prononcé dans le domaine d'étude, il faut appliquer une pression de 2 bars et ouvrir à 3 crans. La pression a un effet plus important.

2.3. Récapitulatif de l'étude d'un plan complet

☛ À partir du modèle polynomial choisi ($y = a_0 + a_1 \cdot A + a_2 \cdot B + a_{12} \cdot A \cdot B$ avec la première notation), on construit la matrice des effets. On note que la colonne AB peut se construire rapidement en multipliant terme à terme les colonnes de A et B : c'est la **méthode générale de construction des termes d'interaction**.

La matrice des effets correspond à une matrice d'Hadamard.

N° essais	**Moyenne**	**A**	**B**	**AB**	Couleur
1	+	-	-	+	15
2	+	+	-	-	20
3	+	-	+	-	25
4	+	+	+	+	40
Coefficient					/

1/ Compléter la matrice, en calculant les coefficients du polynôme :

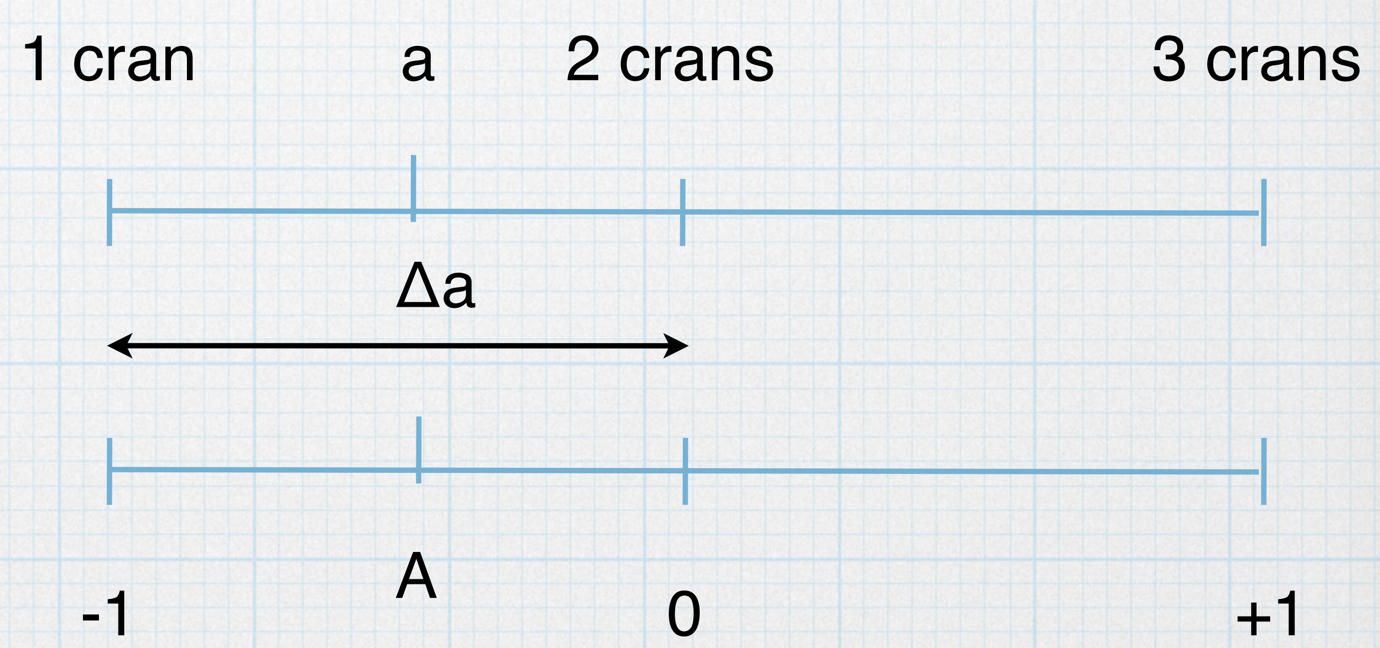
2/ Que constatez-vous ?

3/ Écrire alors le modèle mathématique :

☛ Le modèle nécessite d'être validé par l'expérience. Couramment on vérifie au centre du domaine d'étude le modèle soit ici avec 2 crans pour ouverture et une pression de 1,5 bars.

☛ En admettant l'étape de validation accomplie, une application possible de ce modèle est la prévision d'une réponse pour des paramètres de fonctionnement quelconques. Comme le **modèle est exprimé avec des variables centrées réduites**, il faudra transformer les variables naturelles de procédé pour être autorisé à utiliser le modèle.

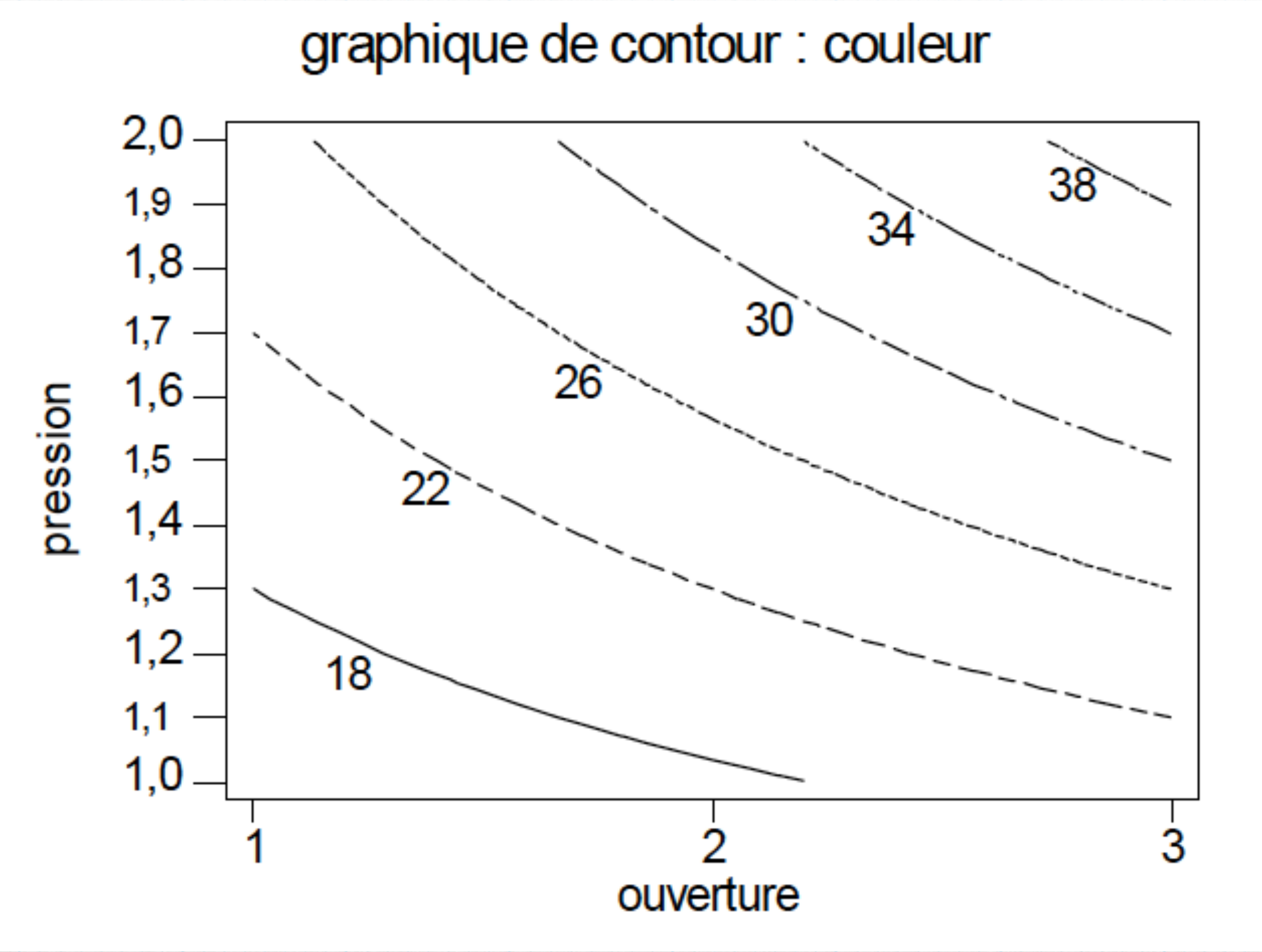
4/ Par exemple pour une ouverture a = 2,5 crans et une pression b = 1,25 bars (a et b étant respectivement les variables naturelles de l'ouverture et de la pression), chercher les variables réduites correspondantes (respectivement A et B) en effectuant un changement de variable (cf diapo. 14) :



5/ Donner alors la valeur attendue pour la couleur :

2.4. Courbes isoréponses

☛ À partir du modèle il est intéressant de tracer les courbes isoréponses pour prévoir graphiquement la couleur. Le logiciel MINITAB fournit cette possibilité de tracé. On constate effectivement que les plus fortes valeurs de couleur sont obtenues pour les valeurs de pression et d'ouverture les plus élevées.



☛ Remarque : pour tracer une des courbes du graphe, il faut d'abord transformer l'expression du modèle Y en passant pour A et B aux variables naturelles a et b. Ensuite on fixe une valeur de réponse à 30 par exemple et on exprime alors b en fonction de a. Il ne reste alors plus qu'à tracer la courbe et à recommencer pour une autre valeur de réponse.

3/ Avantages et inconvénients des plans factoriels complets

☛ Les plans factoriels complets sont des plans dits sans risque car ils permettent de déterminer tous les effets et toutes les interactions sans ambiguïtés.
Le nombre d'essais nécessaire est au moins égal au nombre total de coefficients à déterminer.

☛ Les essais sont réalisés de telle sorte que les coefficients sont estimés avec une variance minimale. Leur simplicité d'exploitation assure un bon "rendement" par rapport aux résultats obtenus.

☛ Néanmoins ils présentent une limite essentielle : le **nombre d'essais augmente très rapidement avec le nombre de facteurs**. On atteint déjà 128 expériences (2^7) pour 7 facteurs ce qui devient donc très vite difficile à réaliser dans la pratique.

Document 3 : Plans factoriels fractionnaires

1/ GRANDS PRINCIPES

☛ Les **plans fractionnaires** ont été conçus pour remédier à l'inflation rapide du nombre d'essais dans les plans complets.

L'objectif des plans fractionnaires va consister à réduire le nombre d'expériences à réaliser par rapport au nombre maximum donné par le plan complet.

Les plans fractionnaires utilisent les matrices des effets des plans complets. Leurs matrices des effets ont donc également toutes les qualités des matrices d'Hadamard.

☛ On parlera de plan 2^{k-p} (p entier) pour indiquer un plan fractionnaire issu du plan complet 2^k avec k facteurs à 2 niveaux. Par exemple le plan 2^{4-1} est un plan fractionnaire permettant l'étude de 4 facteurs en utilisant la matrice des effets du plan complet 2^3 : 2^3 expériences sont à réaliser au lieu des 2^4 expériences du plan complet. Le nombre d'expériences est divisé par 2, il correspond à la réalisation d'un demi plan complet 2^4.

☛ De la même manière il est possible de réaliser des plans 2^{k-2} ,… 2^{k-p} (p entier < k). Le plan 2^{7-3} permettra une étude de 7 facteurs avec seulement 2^4 expériences au lieu de 2^7 : il s'agit donc de 1/8ème du plan complet 2^7.

☛ Néanmoins les plans fractionnaires nécessitent une phase de conception plus longue car l'interprétation qui résultera des résultats dépend essentiellement du choix de p. **Plus** le nombre **p augmente**, **plus la charge expérimentale va diminuer** mais au détriment d'un **risque de plus en plus grand sur la qualité** des informations tirées du plan. Il faudra donc évaluer les risques avant de démarrer l'expérimentation et les minimiser en construisant le plan fractionnaire adéquat. C'est le pari du plan fractionnaire.

2/ EXPÉRIENCES « INUTILES »

☛ Un plan complet 2^4 permet d'estimer les 4 effets des facteurs, la moyenne, les 6 interactions d'ordre 2, les 4 interactions d'ordre 3 et l'interaction d'ordre 4.

1/ Donner le modèle polynomial correspondant à ce plan :

☛ On considérera que les **interactions d'ordre 3** peuvent être **négligées**. C'est un résultat très général : dans la pratique les interactions d'ordre supérieur ou égal à 3 sont négligeables, sauf de très rares exceptions.

2/ En déduire le nombre d'expérience nécessaire pour le plan 2^4 :

☛ Pour un plan 2^3 avec 3 facteurs A, B et C, si on se contente de vouloir estimer l'influence de A, B et C sans se préoccuper des interactions, on a 4 coefficients à connaître : la moyenne et les effets des 3 facteurs soit 4 essais.

1/ Donner le modèle polynomial correspondant à ce plan :

2/ Préciser le plan fractionnaire utilisé, et le nombre d'essais économisés :

☛ On n'obtiendra pas d'information sur les interactions (AB, AC, BC). Si jamais une des interactions n'était pas négligeable, les coefficients du modèle seraient entachés d'erreur et le modèle ne conviendrait pas pour une utilisation ultérieure. C'est tout le pari d'un plan fractionnaire !

Pour conclure, **les plans fractionnaires sont souvent utilisés en temps que plans de criblage destinés à déterminer quels sont les facteurs les plus influents** sans forcément étudier les interactions d'ordre 2. C'est souvent le cas si le nombre de facteurs est très élevé.

3/ NOTION D'ALIASE ET CONTRASTE

☛ Pour l'étude d'un plan fractionnaire 2^{4-1} à 4 facteurs, 8 expériences sont réalisées. Le modèle de plan factoriel avec 4 facteurs est le suivant :

$y = a_0 + a_1 \cdot A + a_2 \cdot B + a_3 \cdot C + a_4 \cdot D + a_{12} \cdot A \cdot B + a_{13} \cdot A \cdot C + a_{14} \cdot A \cdot D + a_{23} \cdot B \cdot C + a_{24} \cdot B \cdot D + a_{34} \cdot C \cdot D + a_{123} \cdot A \cdot B \cdot C + a_{124} \cdot A \cdot B \cdot D + a_{134} \cdot A \cdot C \cdot D + a_{234} \cdot B \cdot C \cdot D + a_{1234} \cdot A \cdot B \cdot C \cdot D$

☛ Les **matrices des effets** des plans factoriels doivent comporter autant de lignes que de colonnes. Chaque colonne correspond à un coefficient du modèle donc il faudrait 16 colonnes : pour utiliser une matrice à 2^{4-1} colonnes, il faut donc faire en sorte que les termes de (16 – 8) colonnes se retrouvent dans les 8 autres colonnes.

☛ Les termes étant tous égaux à -1 ou +1, une solution consiste à écrire que la variable D aura la même valeur dans chacune des 8 expériences que la valeur du produit de variables A.B.C. Le choix des valeurs de D dans la matrice d'expérience sera donc fixé.

☛ On peut donc écrire pour les 8 expériences : D = A.B.C. Comme cette égalité est vraie pour les 8 expériences, on peut écrire l'égalité de colonne suivante :

D = ABC

☛ Le choix de D = A.B.C permet alors d'écrire les égalités suivantes sur les variables en utilisant le fait que le produit d'une variable quelconque par elle-même est toujours égal à + 1.

A.D = B.C ; B.D = A.C ; C.D = A.B ; A.B.D = C
A.C.D = B ; B.C.D = A et A.B.C.D = 1

On dira que D est l'aliase initiale (choisie par l'expérimentateur).
D est **aliasé** avec A.B.C, B est aliasé avec A.C.D, A.D est aliasé avec B.C …
Le modèle s'écrit alors sous la forme :

1/ Écrire alors le modèle polynomial correspondant :

☛ On reconnaît bien le modèle d'un plan factoriel complet 2^3 dont on pourra utiliser la matrice des effets. Les **nouveaux coefficients h_i** calculés avec la matrice des effets par la méthode habituelle seront nommés contrastes.

Un contraste h_i est une somme d'effets et d'interactions. On les écrit ainsi :

$h_1 = a_0 + a_{1234}$; $h_2 = a_1 + a_{234}$; $h_3 = a_2 + a_{134}$; $h_4 = a_3 + a_{124}$;
$h_5 = a_{12} + a_{34}$; $h_6 = a_{13} + a_{24}$; $h_7 = a_{14} + a_{23}$; $h_8 = a_4 + a_{123}$.

☛ Remarque : un contraste apparaît ici comme une somme mais dans le cas général des signes négatifs peuvent apparaître. Il suffisait, par exemple, de choisir comme aliase initiale D = - A.B.C.

4/ INTERPRÉTATION DES CONTRASTES

☛ Les difficultés d'interprétation apparaissent dans l'expression des contrastes du paragraphe précédent. Les 16 coefficients initiaux a_i du modèle sont a priori impossibles à calculer car ils sont groupés par 2.

☛ La détermination des effets et des interactions est néanmoins possible moyennant certaines hypothèses couramment admises. Bien entendu il faut valider ces hypothèses avant de conclure une étude, par exemple avec la vérification de points expérimentaux particuliers comme au centre du domaine d'étude. Les hypothèses sont les suivantes :

Hypothèse 1 : les interactions d'ordre égal ou supérieur à 3 peuvent être négligées.
Hypothèse 2 : si un contraste est négligeable, tous les termes aliasés sont eux-mêmes négligeables ; une compensation des termes est très improbable.
Hypothèse 3 : si deux effets de facteurs sont négligeables, on supposera que leur interaction l'est aussi.
Hypothèse 4 : une interaction comportant deux facteurs dont l'un a un effet négligeable, est généralement une interaction négligeable.

☛ Il faut néanmoins être attentif à toute anomalie dans les résultats même si on estime que ces hypothèses sont vérifiées dans 95 % des cas.

5/ RÉSOLUTION D'UN PLAN FRACTIONNAIRE

☛ Le choix de l'aliase initiale est fondamental pour la conception d'un plan fractionnaire.

Dans l'exemple du paragraphe 1.3, le choix D = A.B.C a permis d'obtenir des contrastes où les effets des facteurs A,B,C et D sont déterminés directement par le calcul des contrastes h_1, h_2, h_3 et h_4.

1/ En utilisant l'hypothèse 1, donner l'expression des contrastes h_1, h_2, h_3 et h_4.

☛ Par contre, on dispose uniquement de la somme des interactions AD et BC, BD et AC, CD et AB. Seuls l'application des hypothèses sur les contrastes calculés permettront, peut-être, de pouvoir connaître toutes les interactions.

☛ Si on avait choisi comme aliase initiale D = AB, on aurait abouti à l'impossibilité de distinguer l'effet d'un facteur avec une interaction d'ordre 2 ! **Il faut donc toujours aliaser les facteurs supplémentaires** (par rapport à ceux du complet) **avec les interactions d'ordre le plus élevé**.

☛ On définit la notion de **résolution** d'un plan fractionnaire selon les termes de l'expression des contrastes :

plan de résolution III : effet d'un facteur aliasé avec interaction dont l'ordre le moins élevé est 2 ;
plan de résolution IV : effet d'un facteur aliasé avec interaction dont l'ordre le moins élevé est 3 ;
plan de résolution V : effet d'un facteur aliasé avec interaction dont l'ordre le moins élevé est 4 ;

☛ Il apparaît que les **plans d'ordre III** sont risqués car si une interaction n'est pas supposée négligeable, elle s'ajoute à l'effet d'un facteur. Ce type de plan est à entreprendre pour réduire énormément le nombre d'expériences dans le cas d'un grand nombre de facteurs. Dans ce cas il est parfois nécessaire de réaliser un plan complémentaire pour accéder à toutes les interactions.

☛ Les **plans d'ordre V** permettent de lever tous les doutes sur la détermination des effets des facteurs et des interactions. Néanmoins ils sont peu fractionnaires et sont ainsi coûteux en nombre d'essais.

☛ Les **plans d'ordre IV** présentent un bon compromis : les effets des facteurs sont faciles à déterminer, il reste par contre des doutes sur les interactions d'ordre 2. Le plan du paragraphe 3 est un plan d'ordre IV.

6/ OPÉRATIONS SUR LES COLONNES (CALCUL DE BOX)

☛ Le **calcul de Box** est un outil très utile pour l'écriture des contrastes. Cette méthode s'applique uniquement aux plans fractionnaires à 2 niveaux -1 et +1.
Chaque colonne de la matrice des effets comprend uniquement des valeurs +1 ou -1. On désigne par **A** la colonne de valeurs sous la variable A. On nomme I la colonne ne comportant que les valeurs +1.

☛ Avec des colonnes quelconques **A** et **B**, les propriétés de la "multiplication des colonnes" sont les suivantes :

- **AB = BA**
- **AI = IA = A** et **- IA = - A**
- **AA = I**

Une égalité entre deux colonnes **A** et **B** signifie que les termes des deux colonnes sont identiques.

7/ CONCEPTION D'UN PLAN FRACTIONNAIRE 2^{3-1}

☛ La conception d'un **plan fractionnaire 2^{3-1}** permet en 4 expériences d'étudier 3 facteurs A, B et C et leurs interactions moyennant certains risques. Il faudra utiliser la matrice des effets d'un plan factoriel complet 2^2 et effectuer 4 expériences au lieu de 8.
1/ Remplir la matrice des effets ci-dessous :

N° essais	**I**	**A**	**B**	**AB**
1				
2				
3				
4				

☛ Une telle matrice ne comprend que 4 colonnes. Quatre autres termes sont à introduire : C, AC, BC et ABC. Pour cela on choisit comme **aliase initial C = AB**.

Plutôt que d'écrire la transformation du polynôme du paragraphe 3, la méthode la plus rapide pour connaître tous les contrastes est de **définir le générateur d'aliases**.

2/ Démontrer que L'écriture **C = AB** est équivalente à **I = ABC** :

☛ **I = ABC** est le générateur d'aliases. Les autres aliases sont obtenues en multipliant chaque colonne par le générateur d'aliases.

3/ D’après la propriété de multiplication avec la colonne **I**, donner ces autres aliases :

☛ On en déduit alors la **matrice des effets avec les contrastes** :

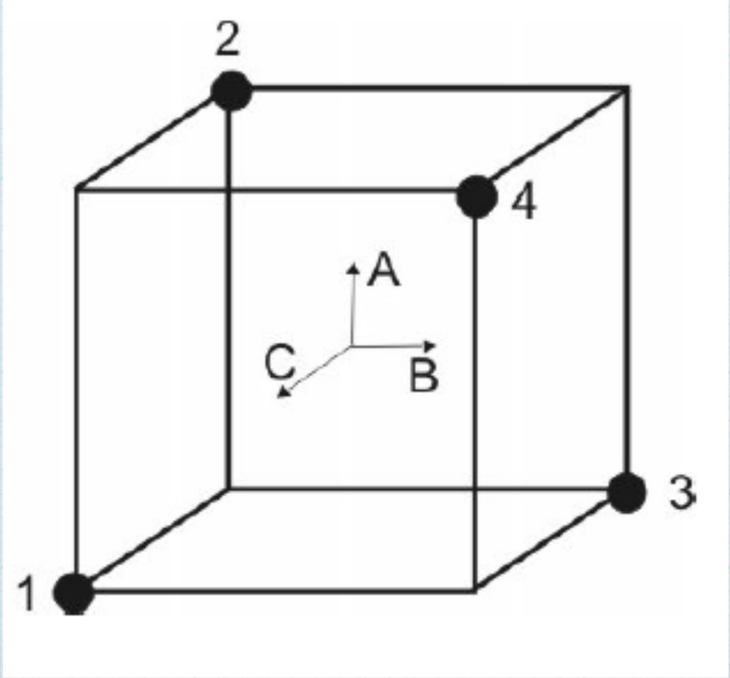
N° essais	**I = ABC**	**A = BC**	**B = AC**	**AB = C**	**Y**
1	+	-	-	+	Y_1
2	+	+	-	-	Y_2
3	+	-	+	-	Y_3
4	+	+	+	+	Y_4
Contraste	h_1	h_2	h_3	h_4	/

4/ Le contraste h_3 se calcule par la méthode habituelle, donner son expression :

☛ Puis on écrit la matrice d'expériences qui indique quels sont les niveaux à appliquer pour les facteurs A, B et C. Les colonnes C et AB doivent être identiques.

N° essais	**A**	**B**	**C**
1	-	-	+
2	+	-	-
3	-	+	-
4	+	+	+

☛ La représentation graphique suivante montre pour notre exemple quels seront les essais à effectuer dans le domaine expérimental.   Les plans complets utilisent comme points expérimentaux "tous les sommets du domaine".   **Le plan fractionnaire n'utilise ici que la moitié des points**.



☛ Il reste maintenant à donner les expressions des contrastes.

5/ Pour cela remplir (sans les réponses) la matrice des effets du plan factoriel complet 2^3 dont est issu le plan fractionnaire 2^{3-1} précédent.

N° essais	**I**	**A**	**B**	**C**	**AB**	**AC**	**BC**	**ABC**	Y
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									

6/ Retrouver à l'intérieur de la matrice d'expériences de ce plan complet, la matrice d'expériences et les réponses du plan fractionnaire (les 4 autres essais sont ceux du plan complémentaire). Donner les réponses correspondantes dans la dernière colonne.

7/ Calculer les effets du facteur B et de l'interaction AC (utiliser la méthode habituelle de calcul des coefficients) :

8/ Calculer la somme de ces deux valeurs :

9/ Que constatez-vous ?

☛ En conclusion on en déduit la **relation d'équivalence générale** entre les colonnes et les contrastes, valable pour tous les facteurs et toutes les interactions.

$$\boxed{B = AC \Rightarrow h_{\text{colonne } B=AC} = B + AC}$$