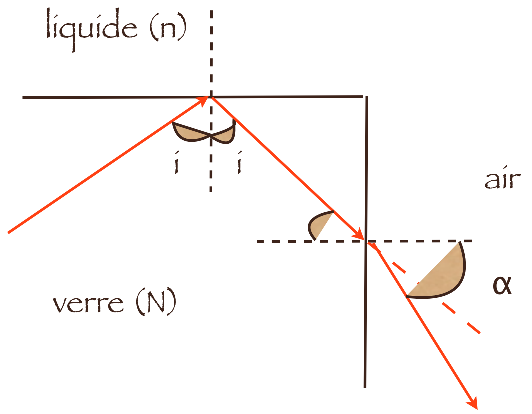
Correction du DST 2 - Analyse
(sur 20 points)

(1h00)

Documents non autorisés - Calculatrice autorisée
Justifier les calculs
Séparer calcul littéral et numérique

<u>Exercice 1</u> : Étude du réfractomètre de Pulrich (7 points)

Un réfractomètre de Pulrich (physicien allemand, 1858-1927) est constitué d'un bloc de verre de section rectangulaire d'indice N *connu, sur lequel on a déposé une goutte d'un liquide d'indice* n *inconnu. On observe un faisceau de rayons parallèles à la limite réfraction - réflexion totale dont on mesure l'angle* α *correspondant.*



1) Il y a phénomène de réflexion totale à l'interface verre-liquide. En utilisant la $2^{ème}$ loi de Snell-Descartes à cette interface, donner la relation entre n, N et l'angle i. **(1 point)**

$$N.\sin i = n$$

en effet, lorsque la réflexion est totale, l'angle de réfraction est égale à 90 °, et donc le sinus de cet angle est égal à 1.

2) En utilisant la $2^{ème}$ loi de Snell-Descartes à l'interface verre-air, donner la relation entre N et les angles i et α. **(1,5 points)**

L'angle d'incidence à cette interface est inscrit dans un triangle rectangle, il vaut donc i – 90°.

D'où la relation :

$$N.\sin(90° - i) = \sin\alpha$$

3) Déterminer finalement, en utilisant les deux résultats des deux questions précédentes, l'expression de n en fonction de N et de l'angle α. **(2 points)**
Rappels mathématiques : $\sin(90° - i) = \cos i$ et $\sin^2 i + \cos^2 i = 1$.

D'après la question 2) :

$$N.\sin(90° - i) = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad N.\cos i = \sin\alpha$$

$$\cos i = \frac{1}{N}.\sin\alpha$$

D'après la question 1) :

$$\sin i = \frac{n}{N}$$

Or $\sin^2 i + \cos^2 i = 1$, donc :

$$\left(\frac{n}{N}\right)^2 + \frac{1}{N^2}.\sin^2\alpha = 1$$

donc, $n^2 = N^2 - \sin^2\alpha$

$$n = \sqrt{N^2 - \sin^2\alpha}$$

4) Calculer la valeur de n sachant que N = 1,626 et α = 60,00°. **(0,5 point)**

$$n = \sqrt{1{,}626^2 - \sin^2 60°} = 1{,}376$$

5) On effectue 5 mesures de l'indice n de l'échantillon :

mesure n°	n
1	1,376
2	1,373
3	1,380
4	1,374
5	1,374

la valeur de référence est n_{ref} = 1,375.

- a - Calculer la valeur moyenne $\bar{n}$, puis calculer l'erreur systématique $\Delta = \bar{n} - n_{ref}$. En déduire la valeur de ε, puis conclure sur la justesse de l'appareil. **(1,5 points)**

On rappelle que si : $\varepsilon = \left|\frac{\Delta}{n_{ref}}\right|$ x 100 $<$ EMT alors l'appareil est juste avec EMT = 0,1 %

La valeur moyenne vaut : $\bar{n}$ = 1,3754

L'erreur systématique vaut :$\Delta = \bar{n} - n_{ref}$ = 0,0004

Et ε = 0,029 % < 0,1 % donc la justesse du réfractomètre est vérifiée.

- b - On estime que la fidélité de l'appareil de mesure est vérifiée, que dire de son exactitude ? **(0,5 point)**

L'appareil étant juste et fidèle, il est alors exact.

<u>Exercice 2 :</u> Contrôle qualité du pourcentage massique d'une solution aqueuse de glucose par polarimétrie (13 points)

Dans le commerce, on peut trouver des solutions aqueuses de glucose pour perfusion en cas de déshydratation ou d'hypoglycémie.
Le glucose de formule brute $C_6H_{12}O_6$ est une sucre monosaccharide (encore appelé ose).
Le stéréoisomère naturel du glucose est le D-glucose. Comme tous les oses, il possède des atomes de carbone asymétriques qui lui donnent un caractère chiral. Le plan de polarisation d'une lumière incidente polarisée rectilignement peut donc tourner à la traversée d'une solution aqueuse de glucose.
Le pouvoir rotatoire spécifique du D-glucose pour la raie D du sodium et pour une température de 20 °C est $[\alpha]_D^{20} = + 0,527$ °.m^2.kg^{-1}.

Dans le cadre d'un contrôle qualité, un technicien de laboratoire doit vérifier, par polérimétrie, la valeur du pourcentage massique d'une solution aqueuse de glucose S_0 dont l'emballage indique :

(5,00 ± 0,60) %

1) Donner l'expression littérale de la loi de Biot pour une solution contenant une substance optiquement active dans un solvant inatif. Préciser la signification de chacun des termes et leur unité dans le système international. **(2 points)**

$$\alpha = [\alpha]_D^{20}.b.C$$

Avec α correspond à l'angle de rotation du plan de polarisation de la lumière en ° ;
$[\alpha]_D^{20}$ le pouvoir rotatoire spécifique de la substance analysée en °.m^2.kg^{-1} ;
b la longueur du tube polarimétrique en m ;
C la concentration molaire de la substance analysée en kg.m^{-3}.

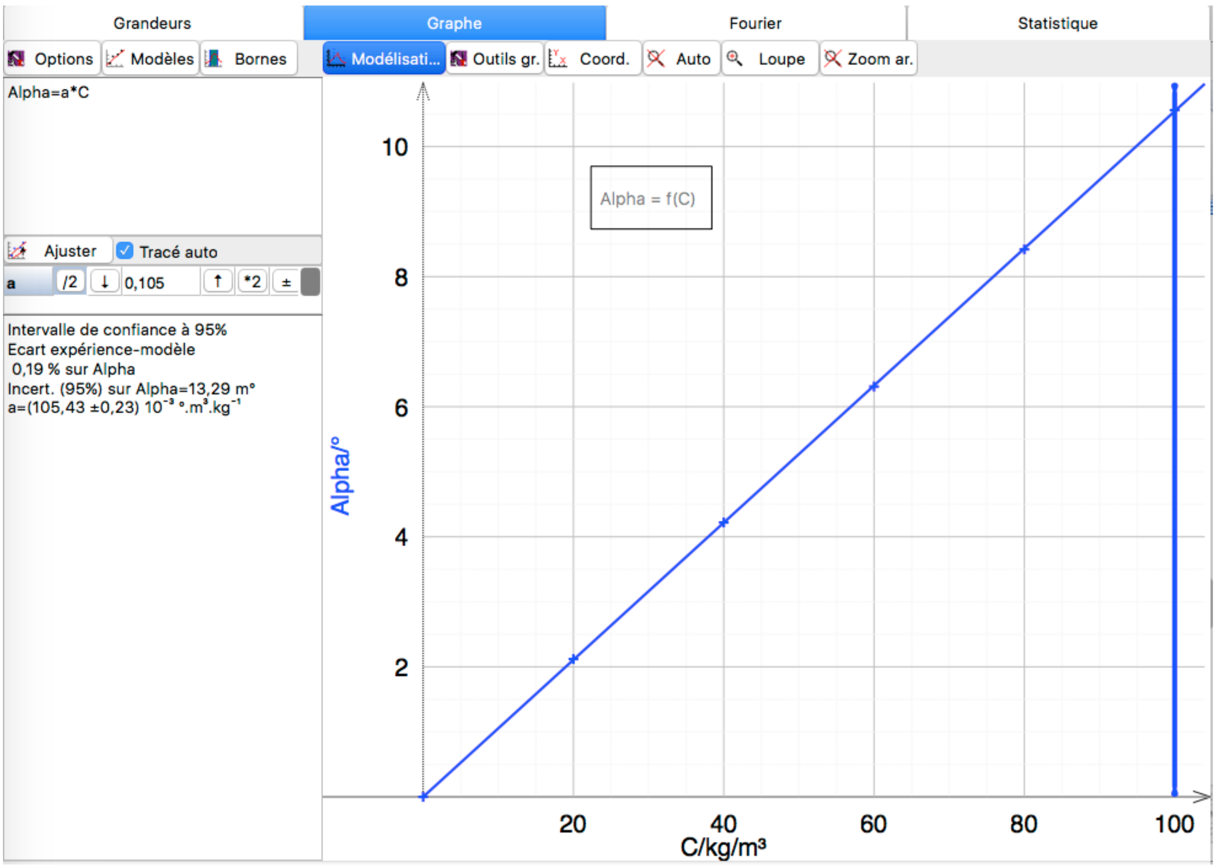
2) Une solution aqueuse de D-glucose est-elle dextrogyre ou lévogyre ? Qu'est-ce qui vous permet de l'affirmer ? **(1 point)**

Le D-glucose est dextrogyre, car il fait tourner le plan de polarisation de la lumière dans le sens trigonométrique, donc l'angle de rotation α est positif.

3) Pour vérifier la valeur du pouvoir rotatoire spécifique du D-glucose, ce technicien place dans un tube polarimétrique de longueur b = (20,0 ± 0,5) cm, des solutions aqueuses de D-glucose de concentrations connues. Il mesure leur pouvoir rotatoire α avec un polarimètre de Laurent, à 20°C pour la raie D du sodium.
Ses résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

C ($kg.m^{-3}$)	0,00	20,0	40,0	60,0	80,0	100,0
α (°)	0,00	2,12	4,22	6,31	8,42	10,56

Il trace la droite d'étalonnage à l'aide d'un tableau-grapheur tel que Regressi :



- a - Écrire l'équation de modélisation fournie par Regressi et indiquer si la loi de Biot est vérifiée pour cette série de mesure. Justifier. **(1,5 points)**

La loi de Biot est vérifiée puique l'équation de modélisation est une fonction linéaire du type :

$$\alpha = a.C \text{ avec } a = (105,43 \pm 0,23).10^{-3}\ °.m^3.kg^{-1}.$$

- b - En déduire la valeur expérimentale du pouvoir rotatoire spécifique $[\alpha]_D^{20}$ et la comparer à la valeur donnée en introduction après avoir calculé la valeur de l'écart relatif notée ER. Conclure. **(1,5 points)**

Par identification, on peut écrire que :

$$a = [\alpha]_D^{20}.b \Rightarrow [\alpha]_D^{20} = a/b = 0{,}10543/0{,}2 = 0{,}52715°.m^2.kg^{-1}$$

On compare cette valeur avec celle de l'énoncé en faisant un calcul d'écart relatif :

$$\mathrm{ER} = \frac{0{,}527 - 0{,}52715}{0{,}527} \text{ x } 100 = -0{,}029\ \%$$

L'écart relatif étant très faible, on peut considérer la valeur obtenue expérimentalement comme étant parfaitement identique à celle de l'énoncé.

4) Afin de déterminer la concentration de la solution S_0 à contrôler, le technicien mesure dans les mêmes conditions expérimentales que précédemment, son pouvoir rotatoire.
Il obtient $\alpha = (5{,}10 \pm 0{,}05)°$.

- a - À partir de la valeur obtenue, déterminer la concentration massique $C(S_0)$ de cette solution glucosée S_0. **(2 points)**

$$\alpha(S_0) = a.C(S_0) \text{ avec } a = (105{,}43 \pm 0{,}23).10^{-3}\ °.m^3.kg^{-1}.$$

$$C(S_0) = \frac{\alpha(s_0)}{a} = \frac{5{,}10°}{0{,}10543\ °.\mathrm{m}^3.\mathrm{kg}^{-1}} = 48{,}4\ \mathrm{kg.m^{-3}}$$

- b - En déduire l'incertitude composée sur la concentration $C(S_0)$ que l'on notera $u_C(C)$. **(1 point)**
On rappelle que dans ce cas :

$$u_C(C) = C(S_0).\sqrt{\left(\frac{u_B(\alpha)}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{u_B(b)}{b}\right)^2 + \left(\frac{u_B([\alpha]_D^{20})}{[\alpha]_D^{20}}\right)^2}$$

$$u_C(C) = 48{,}4 \text{ x } \sqrt{\left(\frac{0{,}05}{5{,}10}\right)^2 + \left(\frac{0{,}5}{20{,}0}\right)^2 + \left(\frac{0{,}23}{105{,}43}\right)^2} = 1{,}3 \ldots\ \mathrm{kg.m^{-3}}$$

- c - Le technicien réitère dix fois la mesure précédente et obtient une incertitude de type A sur C, $u_A(C) = 0{,}03\ kg.m^{-3}$. En déduire l'incertitude combinée sur C, que l'on notera $u_C'(C)$. **(1 point)**
On rappelle que dans ce cas :

$$u_C'(C) = C(S_0).\sqrt{\left(\frac{u_B(\alpha)}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{u_B(b)}{b}\right)^2 + \left(\frac{u_B([\alpha]_D^{20})}{[\alpha]_D^{20}}\right)^2 + (u_A(C))^2}$$

$$u_C'(C) = 48{,}4 \text{ x } \sqrt{\left(\frac{0{,}05}{5{,}10}\right)^2 + \left(\frac{0{,}5}{20{,}0}\right)^2 + \left(\frac{0{,}23}{105{,}43}\right)^2 + 0{,}03^2} = 1{,}95 \ldots \text{ kg.m}^{-3}$$

- d - Exprimer convenablement le résultat de mesure sur la concentration avec une incertitude élargie en prenant comme facteur d'élargissement k = 2. **(1 point)**

D'où le résultat de mesure : $C(S_0) = (48{,}4 \pm 3{,}9)$ kg.m^{-3}

5) Sachant qu'un litre de solution glucosée à 10,0 % contient 100 g de glucose, quelle est la valeur du pourcentage massique en glucose, noté p, de cette solution ? **(1 point)**

Le résultat de mesure peut s'écrire en g.L^{-1} : $C(S_0) = (48{,}4 \pm 3{,}9)$ g.L^{-1}

Donc le pourcentage massique en glucose est $p = (4{,}84 \pm 0{,}39)$ %

6) Pourquoi ce technicien peut-il valider son contrôle qualité ? **(1 point)**

Le contrôle qualité est validé car le pourcentage massique obtenue est contenue dans les spécifications inscrites sur l'emballage.

FIN DE L'ÉPREUVE