

DST 1 - Analyse (sur 20 points) (1h00)

*Documents non autorisés - Calculatrice autorisée
Justifier les calculs
Séparer calcul littéral et numérique*

Exercice 1 : Capabilité du Processus de fabrication de feuilles de carton d'une entreprise papetière (11,5 points)

Une entreprise papetière contrôle l'épaisseur des feuilles de carton qu'elle produit. Dans une journée de production, 20 groupes de taille $n = 5$ ont été prélevés, sur lesquels on a mesuré la moyenne et l'étendue w de l'épaisseur (exprimées en mm):

N° de groupe	e_{moyen} (mm)	w (mm)	N° de groupe	e_{moyen} (mm)	w (mm)
1	2,000	0,241	11	1,967	0,162
2	2,005	0,204	12	2,023	0,138
3	1,991	0,177	13	2,023	0,101
4	1,981	0,113	14	2,184	0,412
5	1,968	0,236	15	1,998	0,150
6	2,059	0,216	16	1,956	0,252
7	2,038	0,211	17	2,031	0,220
8	1,996	0,158	18	2,015	0,118
9	1,998	0,141	19	2,076	0,130
10	1,975	0,308	20	1,996	0,200

Le bureau d'études a fixé une valeur nominale de 2,000 mm avec des tolérances inférieure et supérieure de 1,50 et 2,50 mm.

- 1) Écrire la spécification sous la forme $e = (\text{valeur numérique} \pm \text{valeur numérique})$ unité.
- 2) Calculer l'étendue moyenne $\langle w \rangle$ et en déduire l'écart-type estimé s par la relation $s = \langle w \rangle / d_2$.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d_2	1,128	1,693	2,059	2,326	2,534	2,704	2,847	2,97	3,078	3,173	3,258

- 3) Rappeler la définition de la capabilité du procédé C_p et calculer sa valeur.
- 4) Rappeler les définitions des capabilités $C_{pk\min}$ et $C_{pk\max}$. Calculer leurs valeurs.
- 5) Préciser quels renseignements apportent ces deux indicateurs. Aux vues des valeurs trouvées, que pouvez-vous en déduire ?

6) Représenter l'allure de la courbe de distribution de Gauss, en précisant sur votre schéma, les barres verticales de tolérances et la dispersion 6σ .

7) Les mesures d'épaisseur sur les 20 groupes sont reproduites une fois par semaine. Au bout de 6 mois de fonctionnement, on s'aperçoit que l'écart-type estimé du processus à doubler.

- a - Calculer les nouvelles valeurs des capacités C_p , C_{pkmin} et C_{pkmax} . On considérera que la moyenne des épaisseurs moyennes n'a quasiment pas changée.

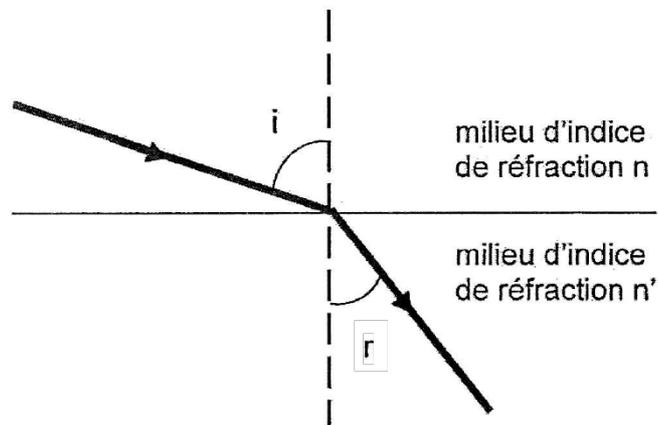
- b - Que peut-on dire du processus de fabrication des feuilles de carton au bout de 6 mois ? Que faudrait-il faire ?

Exercice 2 : Utilisation du réfractomètre en viticulture (8,5 points)

Le réfractomètre d'Abbe (schéma 1 en annexe 1) est un instrument d'optique utilisé par les viticulteurs pour prévoir le degré alcoolique d'un vin à partir de la mesure de l'indice de réfraction du jus des raisins vendangés.

Lors du passage d'un milieu d'indice de réfraction n à un milieu d'indice de réfraction n' , la lumière subit un changement de direction appelé phénomène de réfraction (cf schéma ci-dessous) :

Schéma illustrant le phénomène de réfraction de la lumière dans le cas où $n' > n$:



1) Les angles d'incidence i et de réfraction r sont reliés par la deuxième loi de Descartes, faisant intervenir les indices de réfraction des milieux, n et n' . Rappeler cette loi en respectant les notations du texte.

I – Principe de fonctionnement d'un réfractomètre d'Abbe :

L'indice de réfraction n d'un milieu dépend de la longueur d'onde λ de la lumière selon la loi de Cauchy : $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$ avec A et B constantes positives caractéristiques du milieu.

Plus l'indice de réfraction d'un milieu est élevé, plus le milieu réfracte la lumière.

Les indices de réfraction des liquides sont donnés à 20°C pour la raie D, jaune, du sodium correspondant à une longueur d'onde de 589,3 nm. Mais en pratique, le prisme P du réfractomètre d'Abbe étudié ici est souvent éclairé en lumière blanche.

2) On s'intéresse à deux radiations de la lumière blanche : une radiation bleue et une rouge. Lors du passage à travers le prisme, la radiation bleue est la plus réfractée. Justifier cette observation sans calcul à l'aide de la loi de Cauchy.

3) Indiquer pourquoi la lumière blanche semble à priori inadaptée à la mesure de l'indice de réfraction de l'échantillon ?

4) À l'aide du schéma 1 de l'annexe 1, citer l'élément du réfractomètre permettant néanmoins de travailler en lumière blanche.

II – Détermination du degré alcoolique d'un vin par réfractométrie :

Un viticulteur souhaite produire un vin portant la mention « sélection grains nobles ». Un tel vin est produit à partir d'une sélection rigoureuse des grains de raisin atteints de pourriture noble due au champignon *Botrytis cinerea*.

Pour obtenir la mention « sélection grains nobles », un vin issu d'une fermentation totale des sucres du jus de raisin doit afficher un pourcentage en volume d'alcool supérieur ou égal à 16,6 %.

Pour estimer ce pourcentage en volume d'alcool d'un vin, le viticulteur s'appuie sur la relation empirique suivante : « Une teneur de 17 g.L⁻¹ de sucres dans le jus de raisin conduit à une teneur en alcool de 1 % en volume après fermentation alcoolique totale ».

La concentration massique en sucres peut être déterminée par la mesure de l'indice de réfraction du jus de raisin à l'aide d'un réfractomètre d'Abbe. Une goutte de jus de raisin est déposée entre les prismes P et P' (**schéma 1 en annexe 1**).

Lorsque la lumière blanche arrive en incidence rasante au point I sur le prisme P, le rayon réfracté ne peut dépasser une valeur maximale correspondant à l'angle de réfraction limite r_1 donné par la relation suivante :

$$\sin r_1 = \frac{n_{\text{jus}}}{n_{\text{P}}} \quad (1)$$

Données :

Indice de réfraction de l'air pour la raie D du sodium : $n_{\text{air}} = 1,000$

Indice de réfraction du prisme P pour la raie D du sodium : $n_{\text{P}} = 1,700$

Angle au sommet du prisme P : $A = 60,00^\circ$

Avec les notations du schéma 1 en annexe 1, dans le prisme P : $A = r_1 + i_2$

5) On mesure à la sortie du prisme P un angle r_2 égal à $9,98^\circ$. On veut montrer que la mesure de l'angle r_2 permet de déterminer la valeur de l'indice de réfraction n_{jus}

a - Calculer la valeur de l'angle i_2 en appliquant la deuxième loi de Descartes au point J.

b - En déduire que la valeur de l'angle r_1 est de $54,15^\circ$, en utilisant les données sur le prisme.

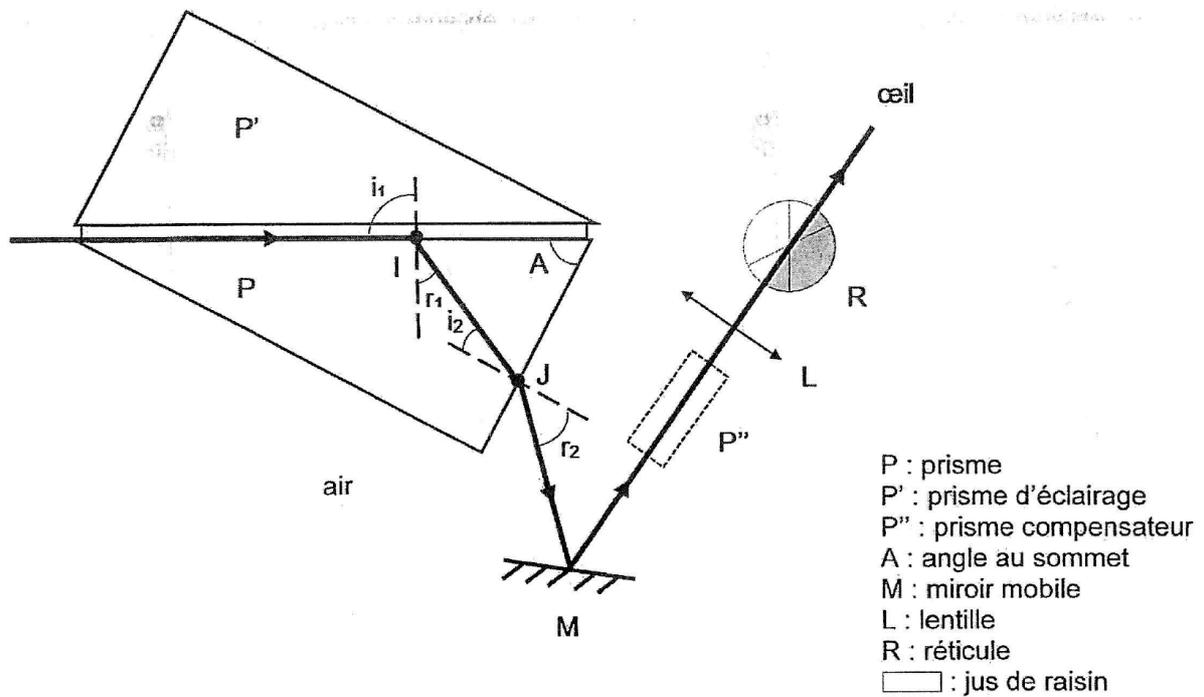
c - À l'aide de la relation (1), calculer la valeur de l'indice de réfraction n_{jus} du jus de raisin.

6) À l'aide du **document 1 de l'annexe 2**, déterminer si un vin obtenu par fermentation d'un jus de raisin d'indice de réfraction $n_{\text{jus}} = 1,378$ peut obtenir la mention « sélection grains nobles ». Justifier la réponse.

FIN DE L'ÉPREUVE

ANNEXE 1

Schéma 1 : schéma simplifié d'un réfractomètre d'Abbe



L'orientation du miroir mobile est ajustée de sorte à observer sur le réticule deux plages nettes : une plage éclairée jaune et une plage sombre.

ANNEXE 2

À RENDRE AVEC LA COPIE

Document 1 : Évolution de l'indice de réfraction de jus de raisin en fonction de la concentration massique en sucres